Problemas & Resoluciones de

CAMPO ELÉCTRICO

(Física, PAU-UNED 2013 & 14, «**E**»)

► **CONTENIDOS:** En la tabla siguiente, los problemas del año *2013* aparecen con los nombres **E-01** a **E-20**. Los del *2014* se corresponden con **E'-21** a **E'-40**.

La página indicada en los problemas del *2013* se refiere al Dossier de la Academia; la de los problemas del *2014* se corresponde al pdf de la web en el cual están todos los enunciados y soluciones de este año ordenados.

El contenido temático de cada problema se especifica en la columna de "Comentarios".

Los años 2013 y 2014 aparecieron sólo 20 tipos diferentes de problema, representados por los que están en negrita en la tabla: **E-01**, **E-02**, **E-06**, **E-07**, etc.

NOMBRE	mod.	op.	probl.	pág.	Comentarios
E-01	1	B	2	*99*	Tma Gauss (esfera)
E-02	2	A	2	*101*	Tma Gauss (cilindro)
E-03	3	A	2	*104*	Idéntico al E-01
E-04	4	B	2	*108*	Similar al E-02
E-05	5	B	2	*111*	Similar al E-08
E-06	6	A	2	*113*	q-punts: ***E***
E-07	7	B	2	*117*	q-punts: ***E*** (dipolo)
E-08	8	B	2	*119*	q-punts: ***E***; *E_form*
E-09	9	A	2	*131*	Idéntico al E-06
E-10	10	A	2	*133*	Idéntico al E-07
E-11	11	A	2	*121*	MRUA ***E*** unif; lin camp
E-12	12	B	2	*124*	Tma Gauss (esfera)
E-13	13	B	2	*127*	Idéntico al E-11
E-14	14	A	2	*128*	Similar al E-12
E-15	15	A	2	*136*	q-punts: *E_form*; cons *E*
E-16	16	A	2	*139*	*d_min* acercam (cons *E*)
E-17	17	A	2	*141*	Idéntico al E-15
E-18	18	A	2	*144*	Mov espont (conteptual)
E-19	19	B	2	*147*	Idéntico al E-16
E-20	20	A	2	*149*	Idéntico al E-18
E'-21	1	A	2	*2*	q-punts: *V*, *W_ext*

E'-22	2	A	2	*9*	q-punts: ***F*** (simetría)
E'-23	3	A	2	*17*	q-punts: ***E*** (2 cargas)
E'-24	4	A	2	*25*	condens: *W_elec*; *v_fin*
E'-25	5	B	2	*33*	dipolo: *E_form*; *E* en ***E_ext***
E'-26	6	B	2	*41*	q-punts: ***E***
E'-27	7	B	2	*50*	condens: *v_fin* (3D)
E'-28	8	A	2	*56*	Idéntico al E'-26
E'-29	9	A	2	*62*	Similar al E'-24
E'-30	10	B	2	*72*	Idéntico al E'-27
E'-31	11	A	2	*78*	Idéntico al E'-23
E'-32	12	B	2	*88*	Idéntico al E'-25
E'-33	13	A	2	*95*	Idéntico al E'-22
E'-34	14	A	2	*104*	q-punts: *V*, cons *E*
E'-35	15	B	2	*114*	q-punts: *V*, *W_ext*, interpr
E'-36	16	A	2	*121*	Similar al E-16 (xo algebr)
E'-37	17	A	2	*128*	q-punt: ***E***
E'-38	18	A	2	*137*	Idéntico al E'-37
E'-39	19	A	2	*144*	Idéntico al E'-36
E'-40	20	A	2	*153*	Idéntico al E'-35

► E-01 [m01—B2; *pág.99*]

2. Un modelo muy simple de neutrón consiste en considerar a dicha partícula como una esfera de radio R_2 compuesta de dos partes. Por un lado tenemos un núcleo de radio R_1 $(R_1 < R_2)$ cargado positivamente con carga $+e$, rodeado por una corteza esférica de radio interno R_1 y radio externo R_2 con carga $-e$. En ambas partes la carga está distribuida uniformemente en el volumen que ocupa. Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por este "neutrón" para:

a) $0 < r \le R_1$ **(1 punto)**

b) $R_1 < r \le R_2$ **(1,5 puntos)**

c) $r > R_2$ **(0,5 puntos)**

Solución

Este problema se resuelve de forma muy sencilla aplicando el teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = 4\pi k Q_{\text{interior}},$$

y considerando superficies esféricas concéntricas de radio *r*, ya que en este caso tenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kQ_{\text{interior}}(r)}{r^2}\,\hat{\mathbf{n}}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la superficie de la esfera considerada apuntando hacia afuera (también considerado como vector radial) .

a) Cuando $0 < r \le R_1$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = V(r)\times\rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \frac{r^3}{R_1^3}e$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{ke}{R_1^3} r\,\hat{\mathbf{n}}$$

b) Cuando $R_1 < r \le R_2$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = e - \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right)\frac{e}{\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)} = e\left(1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{ke}{r^2}\left(\frac{R_2^3 - r^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)\hat{\mathbf{n}}$$

c) Cuando $r > R_2$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = e - e = 0$$

$$\mathbf{E}(r) = 0\,\hat{\mathbf{n}}$$

► E-02 [m02—A2; *pág.101*]

2. Tenemos un tubo que podemos considerar infinitamente largo, cuya sección tiene 2 cm de radio interior y 3 cm de radio exterior. En el tubo se distribuye uniformemente una carga de 3 μC por metro lineal de tubo (densidad lineal de carga $\lambda = 3\ \mu\text{C m}^{-1}$).

Datos: $k = 9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$.

- ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado a 1 cm del eje del tubo? **(1 punto)**
- ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado a 10 cm del eje del tubo? **(1,5 puntos)**

Solución

Podemos calcular el campo eléctrico de forma muy sencilla aplicando el teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 4\pi k Q_{\text{interior}},$$

y considerando superficies cilíndricas de radio r y longitud L coaxiales con el tubo. Como consecuencia de la simetría del problema, el campo será perpendicular a la dirección del tubo y su módulo dependerá exclusivamente de la distancia radial r del punto de observación al eje del tubo. Como el campo será perpendicular al vector superficie de las dos bases de la superficie cilíndrica considerada, sólo la superficie lateral, de área $A = 2\pi r L$, contribuirá al flujo, por lo que obtenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{2kQ_{\text{interior}}}{Lr}\hat{\mathbf{n}}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la dirección del tubo en el punto considerado.
En el interior de un cilindro de radio 1 cm la carga encerrada es nula, por lo que

$$\mathbf{E}(1\text{ cm}) = 0\,\hat{\mathbf{n}}$$

Si consideramos un cilindro de radio 10 cm, la carga encerrada será

$$Q_{\text{interior}} = \lambda L,$$

de modo que obtenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{2k\lambda}{r}\hat{\mathbf{n}} = 5{,}4\times 10^5\,\hat{\mathbf{n}}\ \text{ N/C}$$

► E-03 [m03—A2; *pág.104*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E-01**

► E-04 [m04—B2; *pág.108*] (Nota: enunciado parecido al **E-02**)

2. Tenemos un tubo que podemos considerar infinitamente largo, cuya sección tiene 2 cm de radio interior y 3 cm de radio exterior. En el tubo se distribuye uniformemente una carga de 3 μC por metro lineal de tubo (densidad lineal de carga $\lambda = 3\ \mu\text{C m}^{-1}$).
Datos: $k = 9\times 10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$.
- ¿Calcular la densidad volumétrica de carga del tubo (carga por unidad de volumen)? **(1 punto)**
- ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado a 2,5 cm del eje del tubo? **(2 puntos)**

Solución

En 1 m de tubo tenemos una carga total de $3\ \mu\text{C}$. El volumen del tubo con esa longitud será

$$V = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right) = 1{,}57\times 10^{-3}\text{m}^3,$$

por lo que la densidad de carga volumétrica será:

$$\rho = \frac{q}{V} = 1{,}91\times 10^{-3}\ \text{C/m}^3.$$

Podemos calcular el campo eléctrico de forma muy sencilla aplicando el teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 4\pi k Q_{\text{interior}},$$

y considerando superficies cilíndricas de radio r y longitud L coaxiales con el tubo. Como consecuencia de la simetría del problema, el campo será perpendicular a la dirección del tubo y su módulo dependerá exclusivamente de la distancia radial r del punto de observación al eje del tubo. Como el campo será perpendicular al vector superficie de las dos bases de la superficie cilíndrica considerada, sólo la superficie lateral, de área $A = 2\pi rL$, contribuirá al flujo, por lo que obtenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{2kQ_{\text{interior}}}{Lr}\,\hat{\mathbf{n}}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la dirección del tubo en el punto considerado.
Si consideramos un cilindro de radio 2,5 cm, la carga encerrada estará comprendida entre el radio interior R_1 de 2 cm y el radio r del cilindro 2,5 cm:

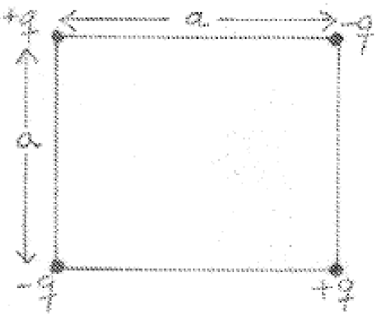
$$Q_{\text{interior}} = \rho V = \rho\pi\left(r^2 - R_1^2\right)L\,,$$

de modo que obtenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{2k\rho\pi\left(r^2 - R_1^2\right)}{r}\,\hat{\mathbf{n}} = 9,72\times10^5\,\hat{\mathbf{n}}\ \text{N/C}$$

► E-05 [m05—B2; *pág.111*] (Nota: enunciado parecido al **E-08**)

2. Tomando como origen de energía potencial la configuración en la que las cargas se encuentran infinitamente alejadas entre sí, determínese el trabajo mínimo necesario para deshacer el cuadrupolo eléctrico de lado a que se muestra en la figura, de modo que las cargas queden separadas por distancias infinitas entre sí. **(2,5 puntos)**



Solución

Para deshacer esta configuración podemos ir separando carga a carga. Si comenzamos por la carga situada en la esquina superior de la izquierda, tenemos que el trabajo necesario para alejarla es igual a la variación de su energía potencial

$$W_1 = \Delta U = U_f - U_i = 0 - kq\left(\frac{-q}{a} + \frac{q}{a\sqrt{2}} + \frac{-q}{a}\right) = kq^2\,\frac{2\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}}\ \text{J}\,.$$

Ahora separamos la carga de la esquina superior derecha

$$W_2 = \Delta U = U_f - U_i = 0 + qk\left(\frac{-q}{a\sqrt{2}} + \frac{q}{a}\right) = kq^2\,\frac{\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}}\ \text{J}\,.$$

Finalmente, alejamos la carga en la esquina inferior izquierda

$$W_2 = \Delta U = U_f - U_i = 0 + qk\left(\frac{q}{a}\right) = \frac{kq^2}{a}\ \text{J}\,.$$

El trabajo total será la suma de los trabajos:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = kq^2\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right) = \frac{kq^2}{a}\left(4-\sqrt{2}\right) = 2{,}6\frac{kq^2}{a}\ \mathrm{J}$$

► E-06 [m06—A2; *pág.113*]

2. Se disponen 4 cargas puntuales en los vértices de un cuadrado centrado en el origen: una carga q en el punto $(-1,1)$, una carga $2q$ en $(1,1)$, una carga $-3q$ en $(+1,-1)$ y otra de $6q$ en $(-1,-1)$. Calcular el campo eléctrico en el origen. **(2,5 puntos)**

Solución

Para calcular el campo eléctrico en cualquier punto es necesario aplicar el principio de superposición. Por la simetría del problema vemos que el campo resultante en el origen tendrá componente nula en la dirección Y. En cuanto a la dirección X tenemos

$$\mathbf{E} = k\left(\frac{q}{2} - \frac{2q}{2} + \frac{3q}{2} + \frac{6q}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\ \mathrm{N/C} = kq2\sqrt{2}\ \mathbf{i}\ \mathrm{N/C}$$

► E-07 [m07—B2; *pág.117*]

2. Un dipolo está constituido por dos cargas positivas iguales q situadas en el eje Y: una está en $y = a$ y la otra en $y = -a$. Obtener la expresión del campo eléctrico en cualquier punto del eje X. **(2,5 puntos)**

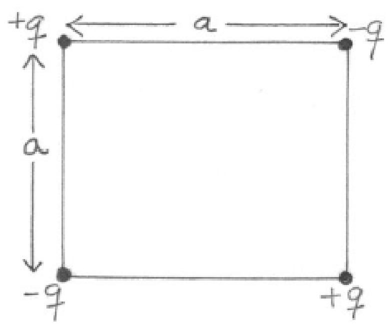
Solución

Por la simetría del problema es fácil darse cuenta que campo eléctrico producido por el dipolo en el eje X no tiene componente Y, y que vale

$$\mathbf{E} = k\frac{2qx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\mathbf{i}$$

► E-08 [m08—B2; *pág.119*]

2. Considérese el cuadrupolo eléctrico de lado a que se muestra en la figura.
-Tomar como origen de coordenadas el centro del cuadrado y calcular el campo eléctrico en ese punto. **(1 punto)**
-Tomando como origen de energía potencial la configuración en la que las cargas se encuentran infinitamente alejadas entre sí, determínese el trabajo mínimo necesario para deshacer el cuadrupolo de modo que las cargas queden separadas por distancias infinitas entre sí. **(2 puntos)**



Solución

Por simetría es fácil darse cuenta de que el campo eléctrico en el centro del cuadrupolo es cero.

Para deshacer esta configuración podemos ir separando carga a carga. Si comenzamos por la carga situada en la esquina superior de la izquierda, tenemos que el trabajo necesario para alejarla es igual a la variación de su energía potencial

$$W_1 = \Delta U = U_f - U_i = 0 - kq\left(\frac{-q}{a} + \frac{q}{a\sqrt{2}} + \frac{-q}{a}\right) = kq^2\,\frac{2\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}}\ \text{J}.$$

Ahora separamos la carga de la esquina superior derecha

$$W_2 = \Delta U = U_f - U_i = 0 + qk\left(\frac{-q}{a\sqrt{2}} + \frac{q}{a}\right) = kq^2\,\frac{\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}}\ \text{J}.$$

Finalmente, alejamos la carga en la esquina inferior izquierda

$$W_2 = \Delta U = U_f - U_i = 0 + qk\left(\frac{q}{a}\right) = \frac{kq^2}{a}\ \text{J}.$$

El trabajo total será la suma de los trabajos:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = kq^2\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right) = \frac{kq^2}{a}\left(4-\sqrt{2}\right) = 2{,}6\,\frac{kq^2}{a}\ \text{J}$$

► E-09 [m09—A2; *pág.131*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E-06**

► E-10 [m10—A2; *pág.133*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E-07**

► E-11 [m11—A2; *pág.121*]

2. Un electrón es lanzado con una velocidad de 2×10^6 m/s dentro de un campo eléctrico uniforme de 5000 V/m. Si la velocidad inicial del electrón tiene la misma dirección y sentido que las líneas del campo:

-Determinar la velocidad del electrón al cabo de $1{,}7\times10^{-9}$ s. **(1 punto)**

-Calcular la variación de energía potencial que ha experimentado el electrón en ese intervalo de tiempo. **(1,5 puntos)**

(Datos: e =1,6 $\times10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg)

Solución

Se trata de un movimiento unidimensional en el que la fuerza que experimenta el electrón debido a la presencia del campo eléctrico tiene sentido contrario al propio campo y por tanto a la velocidad inicial. Esta fuerza es constante y vale $F = -eE$, y producirá una aceleración también constante que decelera al electrón:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-eE}{m}$$

Como se trata de un movimiento uniformemente acelerado tenemos que

$$v = v_0 + at = v_0 - \frac{eE}{m} t = 0,505 \times 10^{-6} \text{ m/s}.$$

Ahora podemos calcular la variación de la energía potencial de dos formas distintas.

a) Calculamos la distancia recorrida por el electrón

$$v^2 - v_0^2 = 2ad = \frac{-2eEd}{m} \quad \rightarrow d = \frac{m}{2eE} \left(v_0^2 - v^2\right) = 0,0021 \text{ m}.$$

y calculamos la diferencia de energía potencial entre dos puntos del campo separados por esta distancia d:

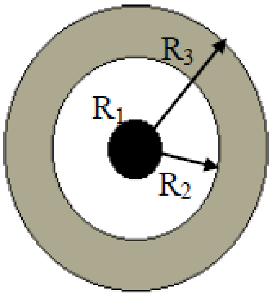
$$\Delta U = q\Delta V = -qEd = eEd = 1,70 \times 10^{-18} \text{ J}$$

b) Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica

$$\Delta U = -\Delta E_c = \frac{1}{2} m_e (v_0^2 - v^2) = 1,70 \times 10^{-18} \text{ J}$$

► E-12 [m12—B2; *pág.124*]

2. Una esfera hueca de radio interior R_2 y radio exterior R_3 (ver figura) contiene una carga uniformemente distribuida por todo su volumen con una densidad ρ. En su centro hay una esfera sólida de radio R_1 cargada uniformemente con una carga total q.



Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por esta distribución de carga para:

a) $0 < r < R_1$ **(1 punto)**

b) $R_2 < r < R_3$ **(2 puntos)**

Solución

Este problema se resuelve de forma muy sencilla aplicando el teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 4\pi k Q_{\text{interior}},$$

y considerando superficies esféricas concéntricas de radio r, ya que en este caso tenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kQ_{\text{interior}}(r)}{r^2} \hat{\mathbf{n}}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la superficie de la esfera considerada apuntando hacia afuera (también considerado como vector radial) .

a) Cuando $0 < r < R_1$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = V(r) \times \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \frac{r^3}{R_1^3} q$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kq}{R_1^3} r \,\hat{\mathbf{n}}$$

b) Cuando $R_2 < r < R_3$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = q + V\rho = q + \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_2^3\right)\rho$$

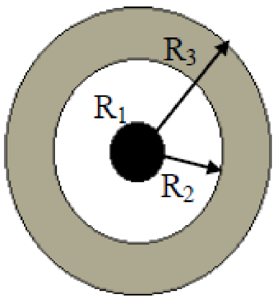
$$\mathbf{E}(r) = \frac{k\left(q + \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_2^3\right)\rho\right)}{r^2} \hat{\mathbf{n}}$$

► E-13 [m13—B2; *pág.127*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E-11**

► E-14 [m14—A2; *pág.128*] (Nota: enunciado parecido al **E-12**)

2. Una esfera hueca de radio interior R_2 y radio exterior R_3 (ver figura) contiene una carga uniformemente distribuida por todo su volumen con una densidad ρ. En su centro hay una esfera sólida de radio R_1 cargada uniformemente con una carga total q.



Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por esta distribución de carga para:

a) $R_1 < r < R_2$ **(1 punto)**

b) $r > R_3$ **(1,5 puntos)**

Solución

Este problema se resuelve de forma muy sencilla aplicando el teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 4\pi k Q_{\text{interior}},$$

y considerando superficies esféricas concéntricas de radio r, ya que en este caso tenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kQ_{\text{interior}}(r)}{r^2} \hat{\mathbf{n}}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la superficie de la esfera considerada apuntando hacia afuera (también considerado como vector radial) .

a) Cuando $R_1 < r < R_2$

$$Q_{\text{interior}}(r) = q$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kq}{r^2}\ \hat{\mathbf{n}}$$

b) Cuando $r > R_3$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = q + V\rho = q + \frac{4}{3}\pi\left(R_3^3 - R_2^3\right)\rho$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{k\left(q + \frac{4}{3}\pi\left(R_3^3 - R_2^3\right)\rho\right)}{r^2}\hat{\mathbf{n}}$$

► E-15 [m15—A2; *pág.136*]

2. Tres cargas puntuales positivas q_1, q_2 y q_3, se encuentran fijadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado l.
- Calcular la energía potencial electrostática de la distribución. **(1 punto)**
- Supongamos que las dejamos en libertad sucesivamente: primero la carga q_1 dejando fijas las otras dos; al cabo de un tiempo suficientemente grande liberamos la carga q_2 manteniendo fija q_3. Finalmente, después de esperar otra vez el tiempo necesario, soltamos la carga q_3. Calcular la energía cinética final que tendrá cada carga. **(1,5 puntos)**

Solución

La energía potencial electrostática de la distribución será

$$U = k\frac{(q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3)}{l}$$

Las cargas, una vez en libertad, se mueven espontáneamente por la acción del campo eléctrico creado por las otras cargas buscando minimizar su energía potencial. En este caso, como todas son cargas positivas, tenderán a alejarse indefinidamente unas de otras. Como el campo electrostático es conservativo, la energía cinética final que tendrá cada carga será igual a la energía potencial que tenía en el momento de la liberación.

En el caso de q_1 tenemos que la energía cinética final será:

$$T_1 = U_1 = k\frac{(q_1q_2 + q_1q_3)}{l}$$

Para la carga q_2 tenemos

$$T_2 = U_2 = k\frac{q_2q_3}{l}.$$

En el caso de la carga q_3, como las otras dos se encuentran a una distancia infinita de ella, no sentirá la acción de ningún campo eléctrico por lo que se quedará en reposo en la posición en la que estaba inicialmente.

$$T_3 = 0$$

► E-16 [m16—A2; *pág.139*]

2. Se lanzan desde el infinito dos protones el uno hacia el otro, cada uno con velocidad 4×10^{6} m/s. ¿Cuál será la distancia mínima de acercamiento? (masa y carga del protón $1{,}67\times10^{-27}$ kg y $1{,}6\times10^{-19}$ C respectivamente) **(2,5 puntos)**
Datos: $k = 9\times10^{9}\ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$.

Solución

Este problema se resuelve fácilmente aplicando el principio de conservación de la energía mecánica. En el instante de máximo acercamiento las velocidades de los dos protones serán cero.

$$\Delta U = -\Delta E_c$$

$$U_f - U_i = E_{c,i} - E_{c,f}$$

$$k\frac{q^2}{r} - 0 = 2\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \quad \rightarrow \quad r = \frac{kq^2}{mv^2} = 8{,}6\times10^{-15}\,\mathrm{m}$$

► E-17 [m17—A2; *pág.141*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E-15**

► E-18 [m18—A2; *pág.144*]

2. Supongamos que situamos una carga negativa en reposo en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico constante y uniforme.
- Describir qué le ocurrirá a la carga y explicar razonadamente si aumentarán, disminuirán o permanecerán constantes las siguientes magnitudes: el potencial eléctrico en las posiciones ocupadas por la carga, la energía potencial de la carga y su energía cinética. **(1,5 puntos)**
-¿Qué cambiará en la respuesta anterior si la carga es positiva? **(1 punto)**

Solución

La carga experimentará una fuerza constante debido al campo eléctrico y se moverá de forma acelerada. Por ser negativa la carga, ésta se moverá espontáneamente en la dirección del campo pero en sentido contrario, es decir, hacia potenciales mayores, de modo que el potencial eléctrico en la posición ocupada por la carga aumentará $\Delta V > 0$. La energía potencial disminuirá ya que $\Delta U = q\Delta V < 0$ mientras que la energía cinética, por tratarse de un campo conservativo, aumentará.
Si la carga es positiva lo único que cambiará es que la carga se moverá en el sentido del campo eléctrico de modo que el potencial eléctrico disminuirá.

► E-19 [m19—B2; *pág.147*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E-16**

► E-20 [m20—A2; *pág.149*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E-18**

► E'-21 [m01—A2; *pág.2*]

2. Se disponen 4 cargas puntuales en los vértices de un cuadrado de lado $2L$ centrado en el origen: una carga $+q$ en el punto $(-L, L)$, una carga $-q$ en (L, L), una carga $-q$ en $(L, -L)$, y otra de $+q$ en $(-L, -L)$.
- Calcular el potencial eléctrico creado por la distribución de carga en el origen. **(1,5 puntos)**
- Calcular el trabajo total necesario para llevar una carga Q, inicialmente en reposo en el infinito, hasta situarla en el origen de coordenadas también en reposo. **(1 punto)**

Solución

Primero calculamos el potencial en el origen debido a la distribución de carga

$$V_0 = k\left(\frac{q}{L\sqrt{2}} - \frac{q}{L\sqrt{2}} + \frac{q}{L\sqrt{2}} - \frac{q}{L\sqrt{2}}\right) = 0\ \text{V}.$$

El trabajo necesario para mover una carga dentro de un campo conservativo sin modificar su velocidad es igual a la variación de su energía potencial. En este caso tenemos que la energía potencial inicial es nula por encontrarse la carga a una distancia infinita del cuadrupolo: $U_i = 0\ \text{J}$. Ahora tenemos que calcular la energía potencial de la carga en el origen de coordenadas

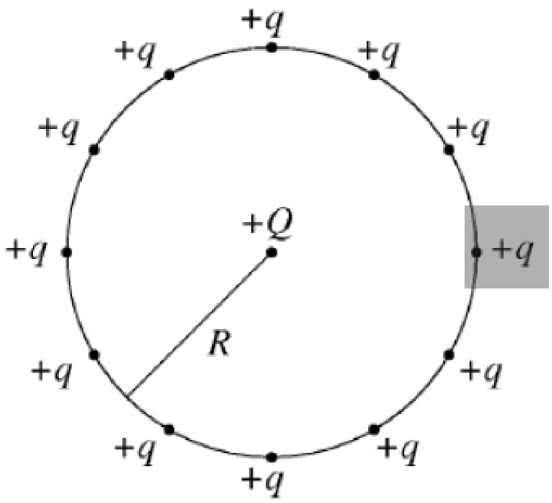
$$U_f = QV_0 = 0\ \text{J}.$$

Por consiguiente, el trabajo total será nulo

$$W = \Delta U = U_f - U_i = 0\ \text{J}.$$

► E'-22 [m02—A2; *pág.9*]

2. Como se muestra en la figura, se colocan 12 cargas positivas iguales $+q$ distribuidas equitativamente sobre una circunferencia de radio R, es decir, los arcos de circunferencia entre cargas contiguas son todos iguales.



- Calcule la fuerza neta que actúa sobre una carga +*Q* en el centro del círculo. **(1 punto)**
- Calcule la fuerza neta que actúa sobre la misma carga +*Q* situada en el centro del círculo si se quita la carga marcada con el recuadro gris.
(1,5 puntos)

Solución

En el caso inicial, las fuerzas eléctricas debidas a cargas diametralmente opuestas se anulan entre sí, por lo que la fuerza total sobre *Q* es cero.
En el segundo caso es suficiente con calcular la fuerza que ejerce la partícula opuesta a la eliminada. Situando un sistema de coordenadas centrado en la carga +*Q* y cuyo eje positivo de las *x* pasa por la posición de la carga eliminada, tenemos que

$$\mathbf{F} = k\frac{Qq}{R^2}\mathbf{i}$$

► E'-23 [m03—A2; *pág.17*]

2. Una carga puntual positiva q_1 está situada en el origen de coordenadas. Otra carga puntual q_2 se sitúa en el punto (0,1) m. Calcular el campo eléctrico creado por estas cargas en el punto (1/2,1/2) m en función de q_1, q_2 y la constante de Coulomb k. **(2,5 puntos)**

Solución

Calcularemos primero el campo creado por la carga situada en el origen.

$$\mathbf{E}_1 = k\frac{q_1}{\left(\sqrt{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}\right)^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{i}+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{j}\right) = k\sqrt{2}q_1(\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

El campo creado por la carga situada en el punto (0,1) será:

$$\mathbf{E}_2 = k\frac{q_2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}\right)^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{i}-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{j}\right) = k\sqrt{2}q_2(\mathbf{i}-\mathbf{j})$$

El campo total será la suma de las dos contribuciones:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2 = k\sqrt{2}\left((q_1+q_2)\mathbf{i}+(q_1-q_2)\mathbf{j}\right)$$

► E'-24 [m04—A2; *pág.25*]

2. En una región del espacio en donde existe un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E\mathbf{i}$ con E positivo, depositamos una carga positiva q de masa m sin velocidad inicial.
- Explicar razonadamente el tipo de movimiento que experimentará la carga debido al campo. **(1 punto)**
- Al cabo de un cierto tiempo la partícula ha recorrido una distancia d bajo la acción del campo eléctrico. Calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico entre los dos puntos. **(1 punto)**
- Calcular la velocidad de la carga después de recorrer esa distancia. **(1 punto)**

Solución:

La carga experimentará una fuerza constante debida al campo

$$\mathbf{F} = qE\ \mathbf{i}$$

Esta fuerza es hacia la derecha, provocando un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado en la dirección del eje x y sentido positivo.

El trabajo realizado por el campo eléctrico es positivo

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = qEd\ ,$$

Podemos obtener la velocidad de la carga de muchas formas:

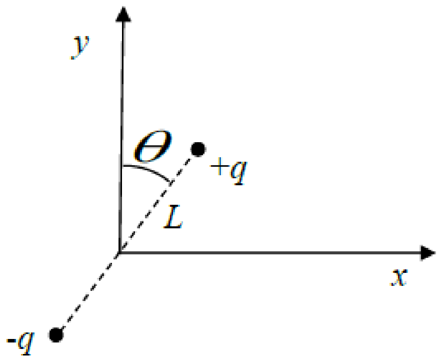
$$W = \Delta E_c \quad \rightarrow \quad qEd = \frac{1}{2} mv^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

$$v^2 = 2ad \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2ad} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

$$\Delta E_c = -\Delta U = W \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

► E'-25 [m05—B2; *pág.33*]

2. Un dipolo consta de dos cargas iguales pero de distinto signo separadas por una distancia L. Supongamos el dipolo mostrado en la figura, que forma un ángulo θ con el eje *y*. El punto medio de su eje imaginario pasa por el origen de coordenadas.



- Calcular la energía potencial electrostática de esta configuración de carga. **(1 punto)**
- Supongamos que el dipolo se encuentra dentro de un campo eléctrico externo que produce un potencial eléctrico que para cada punto del espacio tiene la función $V(x, y) = x^2 + y^2$ (en voltios). Calcular la energía potencial electrostática del dipolo (suma de las energías potenciales de las dos cargas) debida al campo externo. **(2 puntos)**

Solución

La energía potencial interna del dipolo (producida por los campos generados por cada carga es)

$$U_{\text{dipolo int}} = -k\frac{q^2}{L}.$$

La energía potencial electrostática de cada carga del dipolo en el campo externo es

$$U_i = q_i V(x_i, y_i)$$

Los potenciales eléctricos debidos al campo eléctrico externo en las posiciones de las cargas del dipolo son

$$V_{+q} = \frac{L^2}{4}\sin^2(\theta) + \frac{L^2}{4}\cos^2(\theta) = \frac{L^2}{4}$$

$$V_{-q} = \frac{L^2}{4}\sin^2(\theta) + \frac{L^2}{4}\cos^2(\theta) == \frac{L^2}{4}$$

Por consiguiente, la energía del dipolo con respecto al campo externo será

$$U_{\text{dipolo ext}} = U_{+q} + U_{-q} = +qV_{+q} - qV_{-q} = 0.$$

► E'-26 [m06—B2; *pág.41*]

2. Supongamos que tenemos dos cargas $-q_1$ y q_2 situadas sobre el eje *x* en los puntos $x = -a$ y $x = a$, respectivamente.
- Calcular el campo eléctrico producido en un punto $x > a$ del eje x. **(1 punto)**
- Calcular el campo eléctrico producido en un punto $x < -a$ del eje x. **(1 punto)**
- Calcular el campo eléctrico producido en un punto $-a < x < a$ del eje x. **(1 punto)**

Solución

El campo eléctrico producido por las dos cargas cuando $x > a$ es

$$\mathbf{E}(x) = \frac{-kq_1}{(x+a)^2}\mathbf{i} + \frac{kq_2}{(x-a)^2}\mathbf{i}$$

Hacemos lo mismo para valores negativos de x, cuando $x < a$ tenemos:

$$\mathbf{E}(x) = \frac{kq_1}{(x+a)^2}\mathbf{i} + \frac{-kq_2}{(x-a)^2}\mathbf{i}$$

Cuando $-a < x < a$ obtenemos

$$\mathbf{E}(x) = \frac{-kq_1}{(x+a)^2}\mathbf{i} + \frac{-kq_2}{(x-a)^2}\mathbf{i}$$

► E'-27 [m07—B2; *pág.50*]

2. Se sitúa un electrón con velocidad inicial nula dentro de un campo eléctrico constante $\mathbf{E} = 5000\,\mathbf{i} - 2000\,\mathbf{j} + 1000\,\mathbf{k}$ N/C.
- Calcular la velocidad del electrón en función del tiempo *t*. **(1,5 puntos)**
- Supongamos que el electrón recorre una cierta trayectoria debido a la acción del campo eléctrico, si la diferencia de potencial entre el punto final y el inicial es de 300 V, ¿cuánto valdrá la velocidad final del electrón? **(1,5 puntos)**

Datos: m_e = 9,1×10^{-31} kg; *e* = 1,6×10^{-19} C.

Solución

La fuerza que experimenta el electrón debido a la presencia del campo eléctrico es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -e(5000\,\mathbf{i} - 2000\,\mathbf{j} + 1000\,\mathbf{k})\ \mathrm{N},$$

y la aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{-e}{m}(5000\,\mathbf{i} - 2000\,\mathbf{j} + 1000\,\mathbf{k})\ \mathrm{m/s^2}$$

por lo que la velocidad en función del tiempo será

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t = -1,76\times 10^{11}(5000\,\mathbf{i} - 2000\,\mathbf{j} + 1000\,\mathbf{k})t\quad \mathrm{m/s}$$

Para la segunda parte aplicamos la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_c = -\Delta U$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -q\Delta V = e\Delta V \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} = 1,027\times 10^7\ \mathrm{m/s}$$

► E'-28 [m08—A2; *pág.56*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E'-26**

► E'-29 [m09—A2; *pág.62*] (Nota: enunciado parecido al **E'-24**)

2. En una región del espacio en donde existe un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E\,\mathbf{i}$ con E positivo, depositamos una carga negativa $-q$ de masa m sin velocidad inicial.

- Explicar razonadamente el tipo de movimiento que experimentará la carga debido al campo. **(1 punto)**

- Al cabo de un cierto tiempo la partícula ha recorrido una distancia d bajo la acción del campo eléctrico. Calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico entre los dos puntos. **(1 punto)**
- Calcular la velocidad de la carga después de recorrer esa distancia. **(1 punto)**

Solución:

La carga experimentará una fuerza constante debida al campo

$$\mathbf{F} = -qE\ \mathbf{i}$$

Esta fuerza es hacia la izquierda, provocando un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado en la dirección del eje x y sentido negativo.
El trabajo realizado por el campo eléctrico es positivo

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = qEd\,,$$

Podemos obtener la velocidad de la carga de muchas formas:

$$W = \Delta E_c \quad \rightarrow \quad qEd = \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

$$v^2 = 2ad \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2ad} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

$$\Delta E_c = -\Delta U = W \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

► E'-30 [m10—B2; *pág.72*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E'-27**

► E'-31 [m11—A2; *pág.78*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E'-23**

► E'-32 [m12—B2; *pág.88*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E'-25**

► E'-33 [m13—A2; *pág.95*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E'-22**

► E'-34 [m14—A2; *pág.104*]

2. **Supongamos la siguiente distribución de carga: una carga *q* en el punto (-1,1),** una carga 2*q* en (1,1), una carga –3*q* en (+1,–1) y otra de 6*q* en (–1, –1).
- Calcular el potencial eléctrico en el origen. **(1,5 puntos)**
- Si situamos una quinta carga *q* y masa *m* en el origen, y la liberamos desde el reposo, calcular su velocidad cuando se encuentre a una distancia infinita de las cargas. **(1,5 puntos)**

Solución

Para calcular el potencial eléctrico en cualquier punto es necesario aplicar el principio de superposición:

$$V = k\left(\frac{q}{\sqrt{2}} + \frac{2q}{\sqrt{2}} - \frac{3q}{\sqrt{2}} + \frac{6q}{\sqrt{2}}\right) = kq3\sqrt{2}\ \mathrm{V}$$

Al situar la carga *q* en el origen, su energía cinética es nula (ya que inicialmente está en reposo) y su energía potencial es *qV*, donde *V* es el potencial en el origen calculado anteriormente. Cuando esta carga se encuentra a gran distancia del origen su energía potencial es nula. Como todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula son conservativas tenemos que

$$\Delta E_c = -\Delta U = U_0 - U_f = U_0 = qV \quad \rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \sqrt{\frac{kq^2 6\sqrt{2}}{m}}\ \text{m/s}$$

► E'-35 [m15—B2; *pág.114*]

2. En tres vértices de un cuadrado de 1 m de lado existen cargas de 10 μC cada una.
- Calcular el trabajo necesario para llevar una carga negativa de –5 μC desde el cuarto vértice al centro del cuadrado. **(2 puntos)**
- ¿Deberemos realizar un trabajo externo sobre la carga para moverla, o será el propio campo creado por la distribución de cargas el que realice el trabajo? Explicar razonadamente la respuesta. **(1 punto)**

Datos: $k = 9\times10^9\ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$.

Solución

$$V_{vértice} = 9\cdot10^9\cdot10^{-6}\left[\frac{10}{1}+\frac{10}{1}+\frac{10}{\sqrt{2}}\right] = 24,36\cdot10^4\ \mathrm{V}$$

$$V_{centro} = 9\cdot10^9\cdot10^{-6}\left[\frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right] = 38,18\cdot10^4\ \mathrm{V}$$

$$W = q\Delta V = q\left(V_{centro} - V_{vértice}\right) = -0,69\ \mathrm{J}.$$

Vemos que el signo del trabajo es negativo. Eso quiere decir que no es necesario realizar ningún trabajo externo, y que será el propio campo eléctrico el que lo haga. Las cargas negativas se dirigen espontáneamente hacia potenciales mayores.

► E'-36 [m16—A2; *pág.121*] (Nota: enunciado parecido al **E-16**)

2. Dos cargas puntuales q_1 y q_2 del mismo signo, con masas m_1 y m_2 respectivamente, se mueven una hacia la otra. Cuando la distancia entre ellas es r_0 sus velocidades son v_1 y v_2. Aplicar el principio de conservación de la energía mecánica total del sistema (cinética + potencial) para calcular la distancia mínima a la que se aproximarán las cargas en función de los datos del enunciado. **(2,5 puntos)**

Solución

Al tener el mismo signo ambas cargas se repelen mutuamente. Aplicando la conservación de la energía, y teniendo en cuenta que en el momento de máxima aproximación sus velocidades serán cero tenemos

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + k\frac{q_1q_2}{r_0} = k\frac{q_1q_2}{r_{\min}}$$

Despejando llegamos a

$$r_{\min} = k\frac{q_1q_2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + k\frac{q_1q_2}{r_0}}$$

► E'-37 [m17—A2; *pág.128*]

2. Una carga q está situada sobre el eje x en el punto $x = a$. ¿Explicar razonadamente cuál de estas cinco expresiones proporciona la expresión correcta del vector campo eléctrico generado por la carga en un punto cualquiera del eje *x*? **(2,5 puntos)**

a) $\mathbf{E}(x) = k\dfrac{q}{(x+a)^3}\dfrac{x+a}{|x+a|}\mathbf{i}$

b) $\mathbf{E}(x) = k\dfrac{q}{(x-a)^2}\mathbf{i}$

c) $\mathbf{E}(x) = k\dfrac{q}{(x+a)^2}\mathbf{i}$

d) $\mathbf{E}(x) = k\dfrac{q}{x^2}\mathbf{i}$

e) $\mathbf{E}(x) = k\dfrac{q}{(x-a)^2}\dfrac{x-a}{|x-a|}\mathbf{i}$

Solución:

Por la simetría del problema es fácil darse cuenta de que el campo eléctrico producido por la carga en el eje X no tiene componente Y. El campo en un punto *x* del eje X será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el punto y la carga, y su sentido vendrá dado por el signo de la carga cuando $x > a$ y el contrario cuando $x < a$. Por lo tanto la solución correcta es la e):

$$\mathbf{E}(x) = k\frac{q}{(x-a)^2}\frac{x-a}{|x-a|}\mathbf{i}$$

► E'-38 [m18—A2; *pág.137*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E'-37**

► E'-39 [m19—A2; *pág.144*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E'-36**

► E'-40 [m20—A2; *pág.153*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **E'-35**