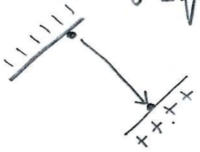
Pepe Ródenas Borja

[dm; 6-12-2016]

Física (2n BAT.)

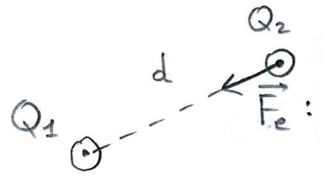
$v = \sqrt{\dfrac{2\,|q\,\Delta V|}{m}}$



T.4 "Campo Electrostàtico"

4.1.- Ley de Coulomb:

Fuerza electrostática entre dos cuerpos 1 y 2, de cargas Q_1 y Q_2 (S.I.: C, culombio) y en reposo:

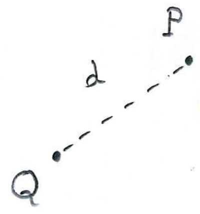


$\vec{F}_e$:

- dirección & sentido:
  - ATRACTIVA: ⊕→ ←⊖
  - REPULSIVA: ←⊕ ⊕→ ó ←⊖ ⊖→
- módulo: $$\boxed{F_e = k\,\frac{|Q_1 \cdot Q_2|}{d^2}} \quad (1)$$

(constante: en vacío, $k = 9 \cdot 10^9\ N \cdot C^{-2} \cdot m^2$; en otros medios, $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}$ ← constante dieléctrica del medio (en vacío, ε_0))

4.2.- Potencial electrostàtico y energía potencial:



$$\boxed{V = k\,\frac{Q}{d}} \quad (2)$$

(S.I.: V, voltio)

← Potencial electrostático V, creado en el punto P por una carga Q ("fuente") que se encuentra en reposo a distancia d. Se mide con el voltímetro, y también recibe el nombre de "voltaje" o "tensión".

▶ **Propiedades del potencial:**

1ª Principio de superposición:

$$\boxed{V = V_1 + V_2} = k\,\frac{Q_1}{d_1} + k\,\frac{Q_2}{d_2} \quad (3)$$

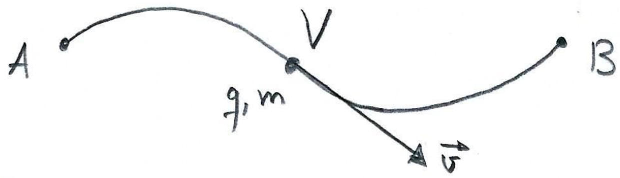
2ª Energía potencial electrostática:

Si en el punto P, sometido a potencial V, colocamos una carga q ("de prueba" o "testigo"), ésta adquiere una energía potencial electrostática: $$(4)\ \boxed{E_p = q \cdot V} \quad \text{(S.I.: J, julio)}$$

NOTA: por tanto, el V en P es la E_p que adquiriría 1 C en P (si usamos unidades S.I.), o la "energía potencial por unidad de carga".

3ª EL CAMPO ELECTROSTÁTICO es CONSERVATIVO:

Sea una partícula de carga q y masa m, que se mueve siguiendo una trayectoria desde un punto A hasta un punto B en una región del espacio en la cual existe un potencial electrostático:



$$\boxed{E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + qV} \quad (5)$$

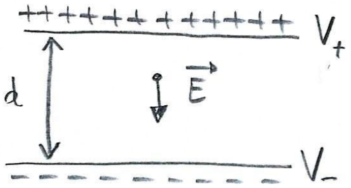
ENERGÍA MECÁNICA TOTAL de la partícula en un instante de su trayectoria.

« Si sólo actúa $\vec{F}_e$ a lo largo de la trayectoria $\Longrightarrow$ $\boxed{E_M(A) = E_M(B)}$ (CONSERVACIÓN) » (6)

NOTAS: Equivalentemente: Si sólo $\vec{F}_e$ en $A \to B$, $\Delta E_M = 0$ $\Longleftrightarrow$ E_M = constante. Esta "conservación" nos permite conocer, por ejemplo, la velocidad final v_B si conocemos la velocidad inicial v_A y los potenciales V_A y V_B. De hecho, será suficiente conocer solamente el incremento o "salto" de potencial, $\Delta V = V_B - V_A$, como se deduce de [5].

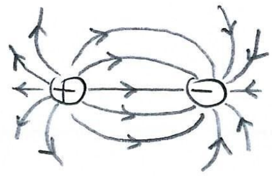
4.3.- CONDENSADORES PLANO-PARALELOS:

« sistema formado por dos placas paralelas ("armaduras", de extensión idealmente infinita), una de las cuales tiene una cantidad de carga positiva repartida homogéneamente a lo largo de toda su superficie, y la otra tiene la misma cantidad de carga negativa también repartida homogéneamente » (7)



(8) $\boxed{\Delta V_c = V_+ - V_-}$

- Campo electrostático $\vec{E}$ entre las placas: lo visualizamos como el vector $\vec{F}_e$ que sentiría una $q = 1\ C$ situada entre las placas (en unidades S.I.).
- Cálculo de $\vec{E}$: « $\vec{E}$ es perpendicular a las placas, constante y uniforme, apunta hacia placa (−), y su módulo: $\boxed{E = \dfrac{\Delta V_c}{d}}$ (UNIDADES S.I.: V/m) » (9)
- Una q entre las placas siente: $\boxed{\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}}$ (10)



- potencial en un punto cualquiera dentro del condensador:

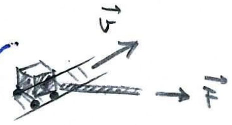
$$\boxed{V(x) = V_- + \frac{\Delta V_c}{d} \cdot x} \quad (11)$$

(siendo x la distancia a la placa ⊖)

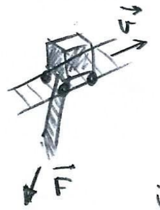
4.4.- EL TRABAJO: SIGNIFICADO y CÁLCULO

1 SIGNIFICADO GENERAL del TRABAJO:

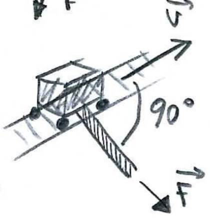
Sea una partícula que se mueve siguiendo una trayectoria desde el punto A hasta el punto B. Si en este desplazamiento ha actuado sobre la partícula una fuerza $\vec{F}$ cualquiera, llamaremos $\boxed{W_F^{A\to B}}$ (trabajo que $\vec{F}$ ha realizado en el desplazamiento A→B) a la « contribución de la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de la trayectoria A → B en intentar aumentar la $|\vec{v}|$ de la partícula » (12) (S.I.: J, julio)



$\boxed{W_F > 0}$: $\vec{F}$ "a favor" del movimiento ("ARRASTRAR")



$\boxed{W_F < 0}$: $\vec{F}$ "en contra" del movimiento ("FRENAR")



$\boxed{W_F = 0}$: $\vec{F}$ ni a favor ni en contra ($\vec{F} \perp \vec{v}$)

Interpretación del SIGNO del TRABAJO (13)

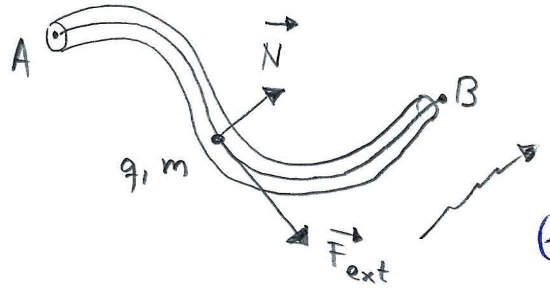
2 «W "QUE HAY QUE HACER"»:

es el W que debe hacer una $\vec{F}_{ext}$ para trasladar una carga q desde un punto A en el que se encuentra en reposo hasta un punto B donde la dejamos en reposo:

$$(14) \quad \boxed{W_{ext}^{A\to B} = \underbrace{\Delta E_p}_{= q\Delta V}}$$

- Es la energía que F_{ext} inyecta en el sistema en el traslado. Como $E_c(B) = E_c(A)$, sólo se inyecta E_p.

- <u>Interpretación y signo del W_{ext}</u>: podemos imaginar que guiamos el movimiento con un tubo sin rozamiento (NOTA: como la fuerza normal que hace este tubo $\vec{N} \perp \vec{v} \Rightarrow W_N = 0 \Rightarrow$ no introduce energía en el sistema).



(15) si hay que "ARRASTRAR", $\boxed{W_{ext} > 0} \Rightarrow$ vamos a E_p mayores

si hay que "FRENAR", $\boxed{W_{ext} < 0} \Rightarrow$ vamos a E_p menores

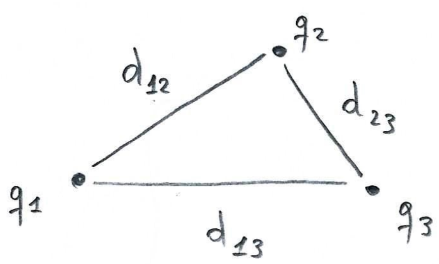
(Podemos pensar en el experimento del movimiento de placa a placa del condensador: si devolvemos el electrón a la placa negativa, tenemos que "arrastrar"; si lo acompañamos en su "caída" a la positiva, tenemos que "frenar" — para que llegue con $v = 0$ —).

Cuando $W_{ext} > 0$, a menudo se dice que es un trabajo hecho "contra el campo".

(NOTA: de hecho, se puede demostrar que [14] es válida aunque en A y B la velocidad no sea cero, siempre que se cumpla que $E_c(A) = E_c(B)$.)

3 « E_f: "ENERGÍA de FORMACIÓN" »

dado un sistema de cargas $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_N$, es el trabajo que hay que hacer para dejarlas en reposo en sus respectivas posiciones trayéndolas del infinito (donde estaban también en reposo).



$$\boxed{E_f = k\frac{q_1 q_2}{d_{12}} + k\frac{q_1 q_3}{d_{13}} + k\frac{q_2 q_3}{d_{23}}} \quad (16)$$

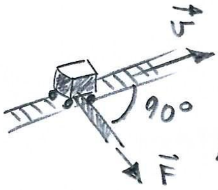
Hay una fracción por cada pareja de cargas del sistema.

- INTERPRETACIÓN según el signo de E_f:

(17)

$\oplus \rightarrow$ $|E_f|$ es la <u>energía que invertimos</u> en formar el sistema, o que queda almacenada en él ["arrastramos" más que "frenamos"].

$\ominus \rightarrow$ $|E_f|$ es la <u>energía que "se libera"</u>, o que quitamos al sistema, para formarlo ["frenamos" más que "arrastramos"].



$\boxed{W_F = 0}$

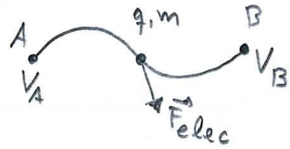
RESUMEN "CAMPO ELECTROSTÁTICO"

---

4 «W "QUE HACE el CAMPO"»:

en un movimiento $A \to B$ absolutamente general, el trabajo que hace la fuerza electrostática sobre la carga q se calcula:

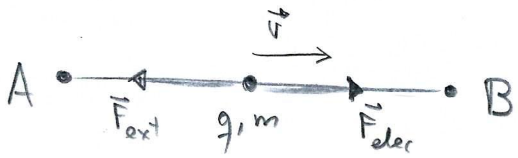
$$(18) \quad \boxed{W_{elec}^{A\to B} = -\Delta E_p} = -q\,\Delta V$$



- **Justificación de la anterior fórmula**: podemos imaginar el caso sencillo de un movimiento $A \to B$ en línea recta que tiene lugar a velocidad constante. Entonces, para mantener constante la $\vec{v}$ habrá que aplicar una $\vec{F}_{ext}$ que en cada punto de la trayectoria compense la $\vec{F}_{elec}$, es decir, $\vec{F}_{ext}$ será siempre opuesta a $\vec{F}_{elec}$: $\boxed{\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{elec}}$ (19) y por tanto hará un trabajo también opuesto:

$$(20) \quad \boxed{\underbrace{W_{ext}}_{=\Delta E_p} = -W_{elec}} \Rightarrow [18] \blacksquare$$

(aquí usamos [14])



(Con 2a ley Newton,
$\vec{v} = \text{constante} \Rightarrow \vec{F}_{TOT} = \vec{0}$
$\Rightarrow \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{elec} = \vec{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{elec}$)

NOTA: la demostración general de la fórmula [18] necesita la definición general de trabajo, que involucra una integral algo complicada.

(Si conocemos las funciones $F(t)$, $v(t)$ y $\theta(t)$, que nos dicen en cada instante el módulo de la fuerza y de la velocidad, así como el ángulo que forman entre sí, el trabajo se puede calcular así:

$$\boxed{W_F^{A\to B} = \int_{t_A}^{t_B} F\, v \cos\theta \, dt} \quad (21)$$
)

- **Interpretación (espontaneidad)**:

Diremos que «un desplazamiento $A \to B$ puede tener lugar de manera espontánea si, cuando conectamos A con B mediante un tubo sin rozamiento y dejamos q en A con $v=0$, la $\vec{F}_{elec}$ es capaz de arrastrar q hasta hacerla llegar a B» (22)

("fuerza a favor del movimiento")

Como "arrastrar" significa $W>0$, la anterior definición de espontaneidad conduce, según [18], a la siguiente

« condición para que $A \to B$ sea espontáneo: $\boxed{\Delta E_p < 0}$ » (23)

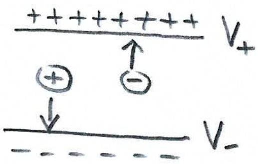
(equivalentemente: "en el desplazamiento $A \to B$, q pierde E_p"; o, también: $\boxed{E_p(B) < E_p(A)}$ (24))

• CONSECUENCIAS de la CONDICIÓN de ESPONTANEIDAD [23]:

a) Independientemente de su signo, « todas las cargas eléctricas se mueven espontáneamente hacia E_p decrecientes » (25)

b) Por tanto, como $E_p = qV \Rightarrow \Delta E_p = q\Delta V$, podemos afirmar que:

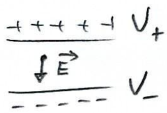
(26) $\left\{ \begin{array}{l} \text{el mov. esp. para } \boxed{q>0} \text{ tiene lugar hacia } V \text{ decrecientes.} \\ \text{el mov. esp. para } \boxed{q<0} \text{ tiene lugar hacia } V \text{ crecientes.} \end{array} \right\}$ ... para recordarlo, basta pensar en lo que ocurre en un condensador espontáneamente:



c) Si dejamos una $q = 1$ C en reposo en un punto P interior cualquiera de una región del espacio donde existe un campo eléctrico, espontáneamente iniciará un desplazamiento que la conduzca a aquel punto en las inmediaciones de P que se encuentre a menor potencial. Por lo tanto, podemos afirmar que la fuerza $\vec{F}_{elec}$ que siente q en P apunta hacia aquel punto de sus inmediaciones que se encuentre a menor potencial. Como la $\vec{F}_{elec}$ que siente 1 C es equivalente al vector campo, concluimos que:

« En cualquier punto del espacio, $\vec{E}$ apunta siempre hacia potenciales decrecientes » (27) [de hecho, apunta siempre "hacia allí donde más bruscamente decrezca el potencial"].

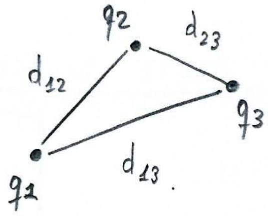
(...de nuevo, esto es muy fácil de recordar si pensamos en el condensador:



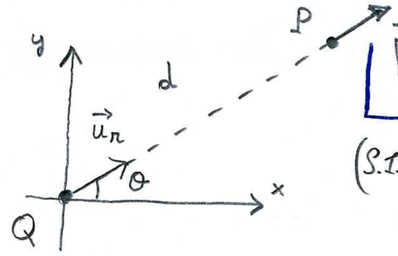
)

Pepe Ródenas Borja

RESUMEN "CAMPO ELECTROSTÁTICO"



4.5.- EL CAMPO ELECTROSTÁTICO (formulación general):



$$\boxed{\vec{E} = k\,\frac{Q}{d^2}\,\vec{u}_r} \quad (28)$$

(S.I.: N/C = V/m)

← Vector campo electrostático $\vec{E}$, creado en el punto P por una carga Q en reposo ("fuente").

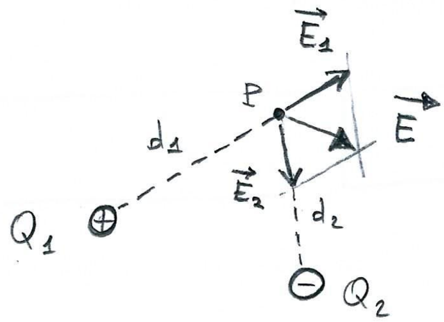
$$(29)\quad \boxed{\vec{u}_r = \begin{Bmatrix} Q \to P \\ |\vec{u}_r| = 1 \end{Bmatrix} = (\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta)}$$

"ángulo con la horizontal"

NOTA: para dibujar el vector campo, imaginamos qué fuerza electrostática ejercería Q sobre una q = 1 C situada en P según la ley de Coulomb.

PROPIEDADES del CAMPO:

1ª PRINCIPIO de SUPERPOSICIÓN:



Si tenemos dos o más cargas fuente, el campo total $\vec{E}$ en P se obtiene sumando vectorialmente las contribuciones de cada una de ellas (según [28]):

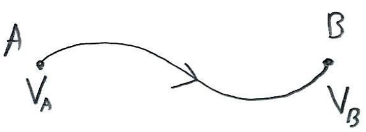
$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_N} \quad (30)$$

2ª FUERZA ELECTROSTÁTICA: Si en el punto P, donde hay un campo eléctrico $\vec{E}$, colocamos una carga q ("de prueba" o "testigo"), ésta siente una fuerza electrostática:

$$\boxed{\vec{F}_e = q\cdot\vec{E}} \quad (31)$$

4.6.- CÁLCULO de VELOCIDADES FINALES a través de una ΔV:

1 CASO GENERAL (si sólo actúa la $\vec{F}_e$): ⇒ conservación de la E_M!



$(\Delta V = V_B - V_A)$

$$(32)\quad \boxed{\Delta E_c = -\Delta E_p} = -q\,\Delta V$$

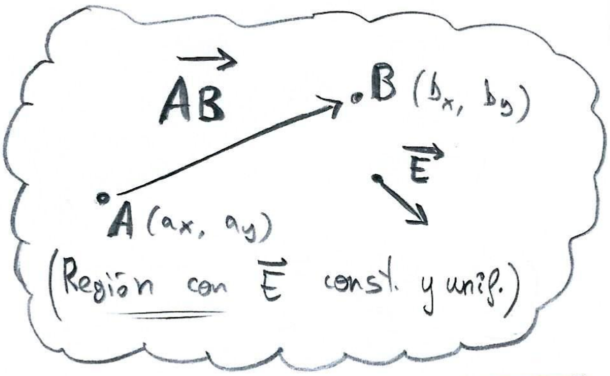
2 Si SE PARTE del REPOSO: (y sólo actúa la $\vec{F}_e$)

$$v_A = 0 \underset{[32]}{\Longrightarrow} \boxed{v_B = \sqrt{-\frac{2q\Delta V}{m}}} = \sqrt{\frac{2\,|q\Delta V|}{m}} \quad (33)$$

(puesto que: $[32] \Rightarrow -q\Delta V = \Delta E_c > 0$;
también: $q\Delta V = \Delta E_p < 0$ por espontaneidad)

3 EN REGIONES con $\vec{E}$ CONSTANTE y UNIFORME ("tipo CONDENSADOR"):

Cuando el desplazamiento $A \to B$ tiene lugar en una región en que $\vec{E} = (E_x, E_y)$ es uniforme y constante, podemos conocer el valor de ΔV usando el vector "desplazamiento",



$$(34) \quad \boxed{\vec{AB} = (\underbrace{b_x - a_x}_{D_x},\ \underbrace{b_y - a_y}_{D_y})} \quad \left(\text{S.I.: } m\right)$$

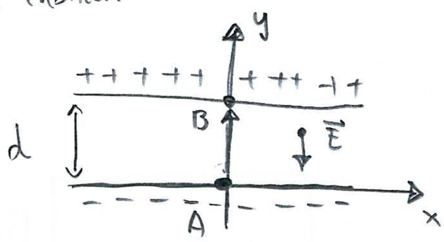
que une la posición inicial A con la final B. Siempre se cumplirá:

$$(35) \quad \boxed{\Delta V = -\vec{E}\cdot\vec{AB} = -(E_x\cdot D_x + E_y\cdot D_y)}$$

(y calculamos v_B con [32] o [33])

(por definición de "producto escalar")

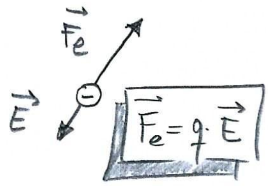
▷ EJEMPLO: en el caso del condensador, y situando los ejes como se indica:



$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB} = (0,\ d) \\ \vec{E} = (0,\ -E) \end{array}\right\} \overset{[35]}{\Longrightarrow} \boxed{\Delta V} = -(0,-E)\cdot(0,d) = -(0\cdot 0 + (-E)\cdot d) = \boxed{E\cdot d},$$

de acuerdo con [10].

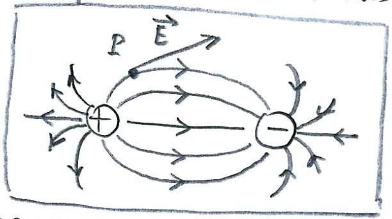
(Pero notemos que la fórmula [35] sirve también para casos en que el movimiento no sea de placa a placa, o que no sea perpendicular a la posición de éstas).



RESUMEN "CAMPO ELECTROSTÁTICO"

4.7.- LÍNEAS de CAMPO y SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES:

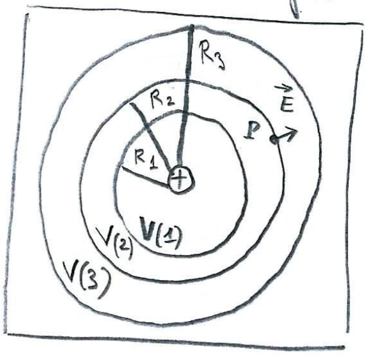
- El campo $\vec{E}$ que hay en una región del espacio se puede representar con las líneas de campo:



LÍNEAS del CAMPO que crea una pareja de cargas de signos opuestos.

(36)
- En cada P, $\vec{E}$ es tangente a la línea, y va orientado según las flechitas.
- Las líneas vienen del ∞ ó salen de las cargas ⊕, y se van al ∞ o entran en las cargas ⊖. Nunca se cruzan.

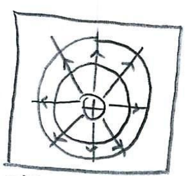
- LAS SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES: son superficies en las cuales V toma un valor fijo. En 2D, son "curvas equipotenciales", y se pueden ver como las curvas de nivel de los mapas topográficos. Para las cargas puntuales, son esferas concéntricas centradas en la carga:



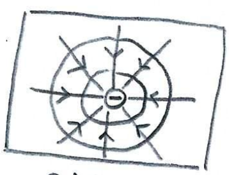
$V(3) < V(2) < V(1)$

propiedades:

(37)
1) el campo $\vec{E}$ en P es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa por P, y apunta hacia V decrecientes.
2) las líneas de campo atraviesan perpendicularmente las superficies equipotenciales:

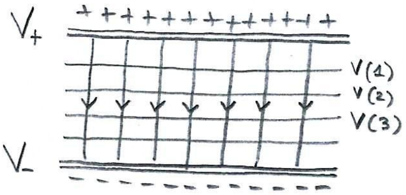


CARGA ⊕



CARGA ⊖

▶ EJEMPLO: en el CONDENSADOR,



$V(3) < V(2) < V(1)$

(38)
- sups. equipot.: planos paralelos a las placas
- líneas de campo: rectas perpendiculares a las placas. Salen de la placa ⊕.