E. PLA SABADELL

[29 - V - 14; dj]

F2

EXERCICIS BÀSICS RESOLTS de «LLEI de DESINTEGRACIÓ RADIOACTIVA»
⊕ resum pràctic de logaritmes; exercicis de reaccions nuclears.

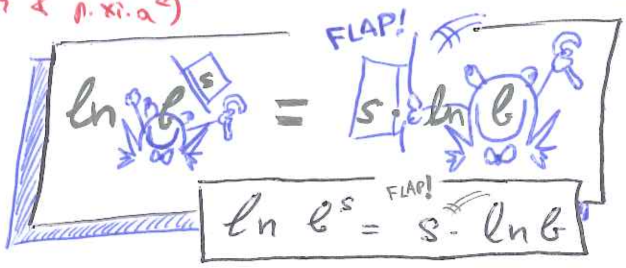
i / xvii

(Veure'n resum: p. X.r & p. XI.a)

LOGARITME NEPERIÀ:

1) $b^x = a \Longleftrightarrow x = \ln a$
2) $\ln b^s = s \cdot \ln b$
3) $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

(PROPIETATS més importants)



$$\ln b^s = s \cdot \ln b$$

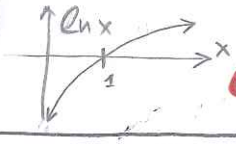
- Algunes altres propietats:

iv) $\ln \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \ln a$

v) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

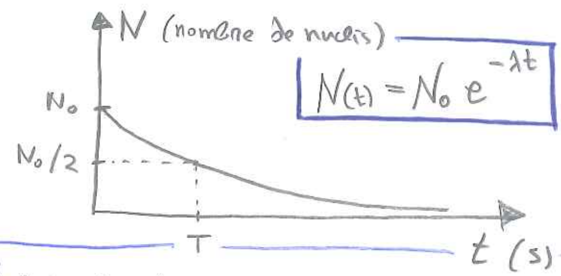
vi) $\ln 1 = 0$ vii) $\ln e = 1$ viii) $e^{\ln a} = a$

ix) $-\ln a = \ln \frac{1}{a}$ x) $\ln a = \ln b \rightarrow a = b$

xi) 

⚠: $\nexists \ln x$ si $x \leq 0$

▶ LLEI EXPONENCIAL de DESINTEGRACIÓ RADIOACTIVA:



$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

N_0: nombre de nuclis en $t=0$.

N: nombre de nuclis en l'instant t (genèric).

T: temps que triga en reduir-se la població inicial N_0 a la meitat ["període de semidesintegració" o "semi-vida"].

τ: vida mitjana d'un nucli (temps mitjà que triga en desintegrar-se).

λ: constant radiactiva (o "de desintegració") del radioisòtop estudiat; [UNITAT S.I.: s^{-1}]

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \qquad T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$A(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right|$: "activitat" de la mostra en l'instant t ⟶ nombre de nuclis que es desintegren per segon.

[UNITAT S.I.: Bq]

1 becquerel = 1 desintegració per segon.

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ ⟵ nº d'AVOGADRO

$M(X)$: massa atòmica de l'element X
↳ l'unitat S.I. és el kg, però si l'expressem en "u" (unitats de massa atòmica) coincideix numèricament amb la massa en g de N_A àtoms (un "mol" d'àtoms).

factor de conversió «u ⟷ kg»: $\frac{10^{-3}}{N_A}$ kg/u $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg/u

▶ Exercicis

(Tipus d'exercici – pàgina on comencen els corresponents enunciats)

		PÀG:
1.LB:	logaritmes - bàsics:	i.anv
2.DB:	desintegració - bàsics:	i.rev
3.DLL:	desintegració - llibre:	vi.rev
4.D/N:	desintegració & f. nuclear (SELE ó LLibre):	viii.anv

1. [LB] Resol les següents equacions:

1.a) $e^x = 6$ 1.b) $2e^x = 6$

1.c) $2e^{-x} = 6$ 1.d) $7e^{-4x} = 5$

1.e) $4e^{5x} - 3e^{2x} = 0$

1.f) $e^{2x} = 3e^x - 2$

1.g) $e^x = -3$ 1.h) $\ln x = 2$

1.i) $6 \ln x = 1$ 1.j) $\ln(x+1) = 60$

1.k) $\ln x^3 = 1$ 1.l) $\ln(x^2 - 1) = 2$

1.m) $\ln x + \ln 3x = 4$

1.n) $\dfrac{\ln 2x^2}{\ln 5x} = 1$

NOTA: veure p. X. revers i p. XI. anvers per a resum de reaccions nuclears

▶ RESOLUCIONS: 1.a/ $e^x = 6 \to x = \ln 6 = 1{,}79$; 1.b/ $2e^x = 6 \to$

$\to e^x = \frac{6}{2} = 3 \to x = \ln 3 = 1{,}10$; 1.c/ $2e^{-x} = 6 \to e^{-x} = \frac{6}{2} = 3 \to$

$\to \frac{1}{e^x} = 3 \to e^x = \frac{1}{3} \to x = \ln\frac{1}{3} = -1{,}10$; 1.d/ $7e^{-4x} = 5 \to \frac{7}{5} = e^{4x} \to$

$\to 4x = \ln\frac{7}{5} \to x = \frac{1}{4}\ln\frac{7}{5} = 0{,}084$; 1.e/ $4e^{5x} - 3e^{2x} = 0 \to$

$\to 4e^{5x} = +3e^{2x} \to \frac{e^{5x}}{e^{2x}} = +\frac{3}{4} \to e^{(5-2)x} = \frac{3}{4} \to 3x = \ln\frac{3}{4} \to x = \frac{1}{3}\ln\frac{3}{4} =$

$= -0{,}096$; 1.f/ $e^{2x} = 3e^x - 2 \to e^{2x} - 3\underbrace{e^x}_{=y} + 2 = 0 \to y^2 - 3y + 2 = 0 \to$

$\to y = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \begin{cases} y_1 = \frac{3+1}{2} = 2 = e^{x_1} \to x_1 = \ln 2 = 0{,}69 \\ y_2 = \frac{3-1}{2} = 1 = e^{x_2} \to x_2 = \ln 1 = 0 \end{cases}$;

1.g/ $e^x = -3 \to x = \ln(-3)$: $\nexists$ solució ; 1.h/ $\ln x = 2 \to x = e^2 = 7{,}39$;

1.i/ $6\ln x = 1 \to \ln x = 1/6 \to x = e^{1/6} = 1{,}18$; 1.j/ $\ln(x+1) = 60 \to$

$\to x+1 = e^{60} \to x = e^{60} - 1 = 1{,}14\cdot 10^{28}$; 1.k/ $\ln x^3 = 1 \to 3\ln x = 1$

$\to \ln x = 1/3 \to x = e^{1/3} = 1{,}40$; 1.l/ $\ln(x^2-1) = 2 \to x^2 = 1 + e^2 \to$

$\to x = \pm\sqrt{1+e^2} = \pm 2{,}90$; 1.m/ $\ln x + \ln 3x = 4 \to \ln(x\cdot 3x) = 4$

$\to \ln(3x^2) = 4 \to \ln 3 + \ln x^2 = 4 \to 2\ln x = 4 - \ln 3 \to$

$\to x = e^{(2 - \frac{1}{2}\ln 3)} = e^2 e^{-\frac{1}{2}\ln 3} = e^2 e^{\ln\frac{1}{\sqrt{3}}} = e^2\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{e^2}{\sqrt{3}} = 4{,}27$;

1.n/ $\frac{\ln 2x^2}{\ln 5x} = 1 \to \ln 2x^2 = \ln 5x \to \ln 2x^2 - \ln 5x = 0 \to$

$\to \ln\left(\frac{2}{5}\frac{x^2}{x}\right) = 0 \to \ln\frac{2}{5} + \ln\frac{x^2}{x} = 0 \to \ln x = -\ln\frac{2}{5} = \ln\frac{5}{2} \to$

$\to x = \frac{5}{2}$.

2. [DB]

2.a) Tenim inicialment 2 kg d'una substància radioactiva de $\lambda = 40$ dies^{-1}. (i) Quant de tems triga en reduir-se a la meitat? (ii) Quina quantitat ens en queda un any després de l'inici de l'experiment?

2.b) Tenim una substància amb $\lambda = 65\ s^{-1}$. En quant de temps la població es redueix a la meitat?

2.c) Tenim 10^{20} nuclis d'una substància radioactiva, i en 6 anys ens en queden 10^{18} nuclis. (i) Quant val λ? (ii) Quina és la vida mitjana d'un nucli?

2.d) Tenim una substància que en 50 dies redueix la seva població inicial a la cinquena part. Quin és el seu període T?

2.e) Una substància de $M = 4u$ es desintegra amb una vida mitjana de 6 anys. Si inicialment tenim 4 kg, quants àtoms tenim en dues setmanes?

2.f) Sabem que en una mostra d'una substància radioactiva el 23è dia queda tres vegades menys quantitat que el segon. Quina és la seva λ?

2.g) Tenim un mol d'una substància de $\lambda = 2$ hores^{-1}. Quina és la seva activitat? I quan han passat 0,347 s?

2.h) L'activitat actual d'una mostra és la cinquena part de quan va començar l'experiment. Quants dies fa que va començar si sabem que $\lambda = 3{,}10 \cdot 10^{-6}$ s^{-1}?

2.i) Una substància es desintegra a $6 \cdot 10^{15}$ Bq. Si tenim 5 mols de partida, quants ens en quedaran en 2 anys? I quants nuclis ens en quedaran?

2.j) Tenim 3 mols d'una substància radioactiva "a" de període $T = 15$ dies. Per cada àtom d'a que es desintegra, n'apareix un de la substància "b". (i) Quants mols de b tindrem en 30 dies? (ii) A quin ritme apareixen els àtoms de b al principi de l'experiment? I el 10è dia?

▶ **RESOLUCIONS:**

2.a/ (i) $N = N_0\, e^{-\lambda t}$ (*) $\rightarrow$ busquem t tal que la massa en t sigui la meitat de la massa en $t_0 = 0$, o sigui que també el nombre d'àtoms en t serà la meitat que en $t_0=0$, i el mateix es pot dir del nombre de nuclis: $\boxed{\frac{1}{2}\underbrace{N(t=t_0)}_{=N_0} = N(t=\text{actual}) = N_0\, e^{-\lambda t}}$

llei de desintegració exponencial [*]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{N_0} = \cancel{N_0}\, e^{-\lambda t} = \cancel{N_0}\,\frac{1}{e^{\lambda t}} \Rightarrow e^{\lambda t} = 2 \Rightarrow \lambda t = \ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{40} = 0{,}017 \text{ dies}}$$ (és a dir: $T = 24$ min, $28'8$ seg.)

COMENTARIS: podem veure que, com ja sabem, aquest temps és precisament $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$, el conegut com "període de semidesintegració". Per un altre costat, si volguéssim ficar en s^{-1} (la unitat S.I.) la constant λ, senzillament multipliquem pel corresponent factor de conversió:

$$\boxed{\lambda(s^{-1}) = \lambda\left(\frac{1}{\text{dies}}\right)\cdot\frac{1 \text{ dia}}{24\cdot 3600 \text{ s}} = \frac{0{,}017}{24\cdot 3600} = 2{,}01\cdot 10^{-7}\ s^{-1}}$$

(ii) Haurem de calcular (**) $\boxed{N(t = 365 \text{ dies}) = N_0\, e^{-\lambda\cdot t}}$, la qual cosa ens dirà el nº de nuclis N que en queden sense desintegrar dels N_0 que en teníem al principi. No tenim, però, la dada N_0. Pensem el següent: en un instant donat, N és el nombre de nuclis, i per tant també el nº d'àtoms, en un instant t. Si multipliquem per M en u (la massa atòmica de l'element), tindrem la massa en u del nostre conjunt d'àtoms; si ara multipliquem el resultat per $\frac{10^{-3}}{N_A} = 1{,}66\cdot 10^{-27}$ kg/u tindrem els kg que pesa la mostra: $\boxed{m[\text{kg}] = \frac{10^{-3}}{N_A}\cdot M[u]\cdot N}$

E. PIA SABADELL

[29-V-14; dj]

F2

EXERCICIS «LLEI DE DESINTEGRACIÓ» + resum logaritmes; reaccions nuclears

21/22/23/24'14

iii / xviii

Fent aquesta operació als dos costats de la llei de desintegració exponencial [*, *] trobem:

$$\underbrace{\frac{10^{-3}}{N_A}\cdot M[u]\cdot N}_{m\,[kg]} = \underbrace{\frac{10^{-3}}{N_A}\cdot M[u]\cdot N_0\, e^{-\lambda\cdot t}}_{m_0\,[kg]}$$

massa que queda de la mostra en l'instant t

massa inicial de la mostra

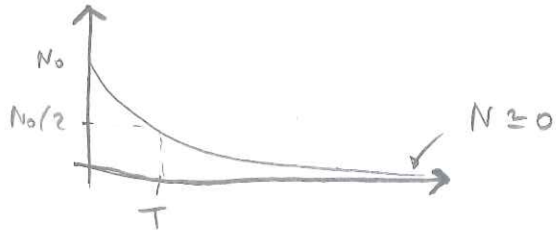
$$\boxed{m(t) = m_0\, e^{-\lambda t}} \quad (3*)$$

és a dir: veiem que «la llei exponencial $N = N_0 e^{-\lambda t}$ serveix també si interpretem N i N_0 com si fossin les masses en kg de la mostra» (Amb un raonament totalment anàleg es veu que igualment la fórmula és vàlida si N i N_0 són quantitats de mols actual i inicial, respectivament).

Per tant, podem fer anar [3*] amb $m_0 = 2$ kg i $\lambda = 40$ dies^{-1}:

$$\boxed{m(t = 1\,\text{any}) = 2\cdot e^{-40\cdot 365} = 0}$$

el número es tan petit que la calculadora no té precisió suficient. És natural, si considerem que $T = 24$ minuts: en termes pràctics, podem dir que "hem arribat a l'asímptota":



Fem el càlcul, com a exemple, de la quantitat de mostra que ens quedaria quan hagués passat només un dia:

$$\boxed{m(1\,\text{dia}) = 2\cdot e^{-40\cdot 1} = \frac{2}{e^{40}} = \frac{2}{2{,}35\cdot 10^{17}} = 8{,}50\cdot 10^{-18}\ kg} =$$

$$= \boxed{5{,}12\cdot 10^{9}\ u}$$, per tant, si parlèssim d'un element amb un pes →

$$\left(m(u) = N_A\ m(g) = 6{,}022\cdot 10^{23}\ \frac{u}{g}\ m(g) = 6{,}022\cdot 10^{23}\ \frac{u}{g}\cdot 10^3\ \frac{g}{kg}\ m(kg) \right)$$

molecular comparable a la de l'urani-235, $M \simeq 235\ u$, estaríem parlant de $2{,}18 \cdot 10^{7}$ àtoms, dels $5{,}13 \cdot 10^{24}$ inicials.

$$\left(2000\ g \cdot N_A \frac{u}{g} \cdot \frac{1\ \text{àtom}}{235\ u}\right)$$

2.b/ $\lambda = 65\ s^{-1} \Rightarrow \boxed{T = \frac{\ln 2}{\lambda}} = \frac{\ln 2}{65} = \boxed{1{,}07 \cdot 10^{-2}\ s}$

període de semidesintegració (o "semivida").

2.c/ $N_0 = 10^{20}$ nuclis en $t_0 = 0$

$N = 10^{28}$ nuclis en $t = 6$ anys

(i) $N = N_0 e^{-\lambda t} \rightarrow 10^{20} = 10^{28}\, e^{-\lambda \cdot 6\text{ anys}} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{10^{20}}{10^{28}} = \frac{1}{e^{\lambda \cdot 6}} \rightarrow e^{\lambda \cdot 6} = \frac{10^{28}}{10^{20}} = 10^{8} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda \cdot 6 = \ln 10^{8} = 8 \ln 10 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda =} \frac{8}{6} \ln 10 = \boxed{3{,}07\ \text{anys}^{-1}}$$

(En unitats S.I.: $\lambda = 3{,}07 \frac{1}{\text{any}} \cdot \frac{1\ \text{any}}{365 \cdot 24 \cdot 3600\ s} = 9{,}74 \cdot 10^{-8}\ s^{-1}$)

(ii) $\boxed{\tau =} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3{,}07} = 0{,}326$ anys $= \boxed{119\ \text{dies}}$

2.d/ $N(t = 50\ \text{dies}) = \frac{N_0}{5} \Rightarrow \frac{\cancel{N_0}}{5} = \cancel{N_0}\, e^{-\lambda \cdot 50} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{50\lambda} = 5 \Rightarrow 50\lambda = \ln 5 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 5}{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{\ln 2}{\lambda}} = \frac{\ln 2}{\ln 5}\, 50 = \boxed{21{,}5\ \text{dies}}$$

2e/ $M = 4\ u$, $\tau = 6$ anys, $m_0 = 4\ kg$.

$$\boxed{N_0 =} m_0(kg) \cdot 10^{3} \left(\frac{g}{kg}\right) \cdot N_A \left(\frac{u}{g}\right) \cdot \frac{1}{M} \left(\frac{\text{àtom}}{u}\right) =$$

$$= \cancel{4} \cdot 10^{3} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} = \boxed{6{,}022 \cdot 10^{26}\ \text{àtoms}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{6 \cdot 365}\ \text{dies}^{-1}} \Rightarrow \boxed{N(14\ \text{dies}) = N_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}} =$$

$$= (6{,}022 \cdot 10^{26}) \cdot e^{-\frac{14}{6 \cdot 365}} = \boxed{5{,}984 \cdot 10^{26}\ \text{àtoms.}}$$

E PCA SABADELL

$\boxed{29\text{-}V\text{-}14;\ aj}$

F2

EXERCICIS

$Q = \Delta m \cdot c^2$ — $^{235}_{92}U$

« Llei de DESINTEGRACIÓ »

⊕ resum logaritmes; reaccions nuclears

2.8

notació: $\left\{ \begin{array}{l} N_2 = N(t = 2 \text{ dies}) \\ \boxed{N_{23} = N(t = 23 \text{ dies})} \end{array} \right.$ $= \boxed{\frac{1}{3} \cdot N_2}$ $\Longrightarrow$ $\underbrace{\cancel{N_0}\, e^{-\lambda \cdot 23}}_{N_{23}} = \frac{1}{3} \underbrace{\cancel{N_0}\, e^{-\lambda \cdot 2}}_{N_2} \Longrightarrow$

dada que ens proporciona l'enunciat

$\Longrightarrow \boxed{3 = e^{-2\lambda}\, e^{23\lambda} = e^{-2\lambda + 23\lambda} = e^{(23-2)\lambda} = e^{21\lambda}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 21 \cdot \lambda = \ln 3 \Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{21} \ln 3} = \boxed{0{,}052 \text{ dies}^{-1}}$

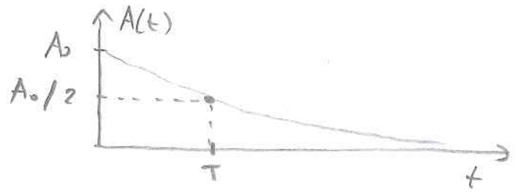
2.9

ACTIVITAT (d'una mostra radioactiva)

$\boxed{A(t) := \left| \frac{dN(t)}{dt} \right|}$: nombre de desintegracions per segon en un instant "t" donat.

definició

$\Longrightarrow$ forma pràctica de fer el càlcul: $\boxed{A(t) = \lambda \cdot N(t) = \overbrace{\lambda N_0}^{A_0} e^{-\lambda t}}$



$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$: temps en que l'activitat es redueix a la meitat

importat adonar-se'n i recordar:

- A depèn de l'instant t
- la forma d'aquesta dependència és exactament la mateixa que N(t): una exponencial decreixent de "temps característic" $\tau = \frac{\ln}{\lambda}$.

- PRIMERA COSA que l'enunciat ens pregunta:

$\boxed{A_0 (t = 0, \text{"ara"}) = \lambda \cdot N_0} =$

$= 2 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = (*)$

(1 mol → $N = N_A$ nuclis)

$(*) = 1{,}2044 \cdot 10^{24}$ desintegracions / hora =

$= 1{,}2044 \cdot 10^{24} \cdot \frac{1}{3600}\ \underbrace{Bq}_{\text{desintegració / segon}} =$

$\boxed{= 3{,}3456 \cdot 10^{20}\ Bq}$

- SEGONA COSA: passem $\lambda = 2$ hores^{-1} a unitats S.I.: $\boxed{\lambda = 2 \cdot \frac{1}{3600} = \frac{1}{1800}\ s^{-1}} \Longrightarrow \boxed{A(t = 0{,}347\ s) = A_0\, e^{-\lambda \cdot t}} =$

$$= \underbrace{(3{,}3456 \cdot 10^{20})}_{\text{activitat inicial}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{1\,800} \cdot 0{,}347}}_{0{,}9998} = \boxed{\underbrace{3{,}3449 \cdot 10^{20}}_{\text{activitat final}} \ \text{Bq}}$$

COMENTARI: veiem que, en un temps tan petit, la reducció de l'activitat és molt petita:

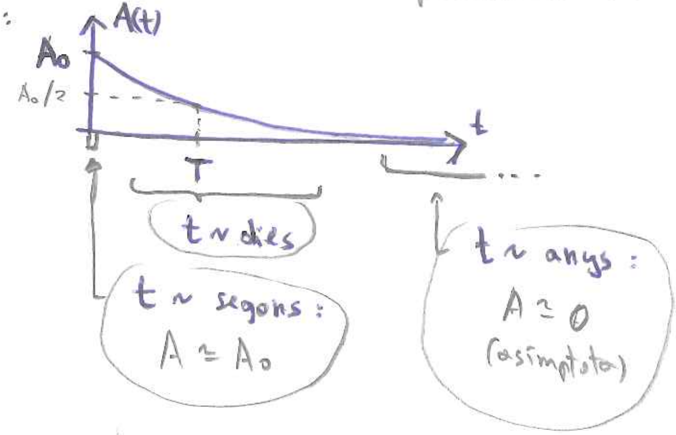
> només una variació apreciable en poc més que una mil·lèsima !!

... la pregunta interessant, en el fons, és la següent: una reducció de l'activitat "petita" respecte de quin criteri de "petitesa"? Resposta: $\boxed{T = \frac{\ln 2}{\lambda}}$ ens diu aquest criteri (el període): per a temps molt més grans, $A \simeq 0$; per a temps molt més petits, $A \simeq A_0$.

(estem ja sobre l'asímptota)

És a l'entorn de temps $t \sim T$ on es produeixen canvis apreciables en l'activitat:

(Hem ficat aquí un exemple gràfic on T són alguns dies, per exemple quatre o cinc, i per tant t "petit" són segons i t "gran" són anys).



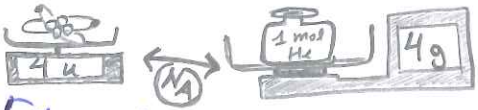
Comentaris semblants poden fer-se per al nombre de nuclis, massa de la mostra, etc., atès que les seves lleis d'evolució temporal són matemàticament equivalents: exponencials decreixents.

De fet, aquest tipus de llei rep sovint el nom de "llei de relaxació" (de "temps característic", o "de relaxació", τ), i apareixen en molts camps de la ciència: el temps de càrrega d'un condensador, la reducció d'amplitud d'un oscil·lador harmònic amb fregament, lleis termodinàmiques de refredament, evolució d'alguns sistemes estadístics, etc.

E. PIA SABADELL

29-V-14; dj

F2



'14

V / xvii

EXERCICIS

«LLEI de DESINTEGRACIÓ»

⊕ resum logaritmes; reaccions nuclears

2.h/

$$\underbrace{A}_{A_0/5} = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \rightarrow e^{\lambda t} = \frac{A_0}{A_0/5} = 5 \rightarrow \lambda t = \ln 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{t = \frac{\ln 5}{\lambda}} = \frac{\ln 5}{3{,}10 \cdot 10^{-6}}\ \text{s} \cdot \frac{1 \text{ dia}}{24 \cdot 3600 \text{ s}} =$$

$$\boxed{= 6{,}01 \text{ dies}}$$

2.i/

$$\begin{cases} A_0 = 6 \cdot 10^{15} \text{ Bq} \\ N_0 = 5 \text{ mols} \end{cases}$$

(doncs $A = A(t)$, i interpretem la dada que dóna l'enunciat com l'actual, és a dir: $A = A(t=0) = A_0$).

$N(t = 2 \text{ anys})$?

expressem en mols el nº de nuclis.

$$\boxed{N = N_0\, e^{-\lambda t}} = 5\, e^{-(1{,}99 \cdot 10^{-9}) \cdot \underbrace{(2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600)}_{t = 2 \text{ anys expressat en segons}}} = (*)$$

λ: $\boxed{A_0 = \lambda \cdot N_0} \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{\lambda = \frac{A_0}{N_0}} = \frac{6 \cdot 10^{15} \text{ Bq}}{5 \cdot N_A \text{ nuclis}} =$$

$$= \frac{6 \cdot 10^{15}}{5 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}} = \boxed{1{,}99 \cdot 10^{-9}\ \text{s}^{-1}}$$

COMPTE!!: l'única dificultat o subtilesa d'aquest problema pot estar aquí: per a evitar moles passades amb les unitats, la regla d'or és passar-ho al S.I.: N_0 s'ha d'expressar en nº de nuclis, no en mols. Això s'aconsegueix multiplicant el nº de mols per N_A.

$$[*] = 5\, e^{-0{,}126} =$$

$$= 5 \cdot 0{,}88 = \boxed{4{,}4 \text{ mols}}$$

El nº de nuclis corresponent a aquests 4,4 mols serà, evidentment,

$$\boxed{N[\text{nuclis}] = N[\text{mols}] \cdot N_A} =$$

$$= 4{,}4\ (\text{mols}) \cdot 6{,}022\ 10^{23} \left(\frac{\text{nuclis}}{\text{mols}}\right) =$$

$$\boxed{= 2{,}7 \cdot 10^{24} \text{ nuclis}}$$

~~2.j~~

Dades: $N_0 = 3$ mols
$T = 15$ dies

Notació: $\begin{cases} N \rightsquigarrow \text{mols d' "a"} \\ B \rightsquigarrow \text{mols de "b"} \end{cases} \Rightarrow$ en un instant t, tenim

$$\boxed{\underbrace{B(t)}_{\text{s'han convertit en els mols que hi ha de "b"}} = \underbrace{\underbrace{N_0}_{\text{mols inicials d' "a"}} - \underbrace{N(t)}_{\text{mols que queden d' "a"}}}_{\text{mols que "han desaparegut" d'a.}}} \stackrel{[*]}{=}$$

$$\stackrel{[*]}{=} N_0 - N_0 e^{-\lambda t} \stackrel{(N_0 \text{ f. comú})}{=} N_0 (1 - e^{-\lambda t}) =$$

$$= N_0 \left(1 - e^{-\ln 2 \cdot \frac{t}{T}}\right) =$$

$$= N_0 \left(1 - (\underbrace{e^{\ln 2}}_{=2})^{-t/T}\right) = \boxed{N_0 \left(1 - 2^{-t/T}\right)} \; [*,*] \rightarrow \text{en el nostre cas,}$$

(i) $$\boxed{B(30 \text{ dies})} = 3 \cdot (1 - 2^{-30/15}) = 3 \cdot (1 - 2^{-2}) =$$

$$= 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = \boxed{2{,}25 \text{ mols}}$$

COMENTARI: no és obligatori, evidentment, fer el tractament algebraic que duu de [*] a l'expressió simplificada [*,*]. Això però, observem que si es fa el càlcul directament a partir de [*], necessitem fer ús de la calculadora:

$$B(t) = N_0 - N(t) = 3 - 3e^{-\frac{\ln 2}{15} \cdot 30} = 3 \cdot (1 - e^{-2 \cdot \ln 2}) =$$

$= 2{,}25$ mols, la qual cosa hem pogut evitar en [*,*] adonant-nos-en que $e^{-\ln 2 \frac{t}{T}} = (e^{\ln 2})^{-t/T} = 2^{-t/T}$.

(ii) El "ritme" del que parla l'enunciat és la quantitat d'àtoms apareguts per segon, $$\boxed{\frac{\partial B}{\partial t}} \stackrel{[*,*]}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left[N_0 (1 - 2^{-t/T})\right] =$$

$$\boxed{= + N_0 \cdot 2^{-t/T} \cdot \frac{1}{T} \ln 2} \; (*,* \text{ bis})$$, fórmula amb la qual hem d'anar amb cura amb les unitats: N_0 s'ha d'expressar en àtoms, no en mols, i T en segons, no en dies, si volem expressar el resultat en unitats S.I. (T sí es pot expressar en dies en l'exponent, si t el fiquem en dies).

Amb aquestes precisions en ment, podem fer el càlcul:

$$\boxed{\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t=0}} = 3\cdot 6{,}022\cdot 10^{23}\cdot 2^{-0/15}\cdot\frac{1}{15\cdot 24\cdot 3600}\cdot \ln 2 =$$

"al principi de l'experiment"

$$\boxed{= 9{,}66\cdot 10^{17}\ \text{àtoms/s}}\quad (3*)$$

$$\boxed{\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t=10\text{ dies}}} = 3\cdot 6{,}022\cdot 10^{23}\cdot 2^{-\frac{10}{15}}\cdot\frac{1}{15\cdot 24\cdot 3600}\ln 2 =$$

$$\boxed{= 6{,}09\cdot 10^{17}\ \text{àtoms/s}}\quad (4*)$$

És a dir: el ritme d'aparició d'àtoms de b s'ha reduït aproximadament a la meitat que de l'inicial.

No cal, però, fer l'anterior derivada. Vegem-ho: és evident que, atès que per cada àtom d'a que es desintegra n'apareix un de b, llavors el ritme d'aparició dels àtoms b $\left(\frac{dB}{dt}\right)$ és igual al ritme de desintegració dels a, que té el nom d'activitat radioactiva $A = \lambda N$. Per tant,

$$\boxed{\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t=0} = A(t=0)} = \lambda N_0 = \frac{\ln 2}{T}N_0 = \frac{\ln 2}{15\cdot 24\cdot 3600}\cdot 3\cdot 6{,}022\cdot 10^{23} =$$

$$\boxed{= 9{,}66\cdot 10^{17}\ \text{àtoms/s}}$$, consistentment amb [3*];

anàlogament: $$\boxed{\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t=10\text{ dies}}} = \lambda N(10\text{ dies}) = \frac{\ln 2}{T}N_0\, e^{-\lambda\cdot 10\,(\text{dies})} =$$

$$= \frac{\ln 2}{15\cdot 24\cdot 3600}\cdot 3\cdot 6{,}022\cdot 10^{23}\cdot e^{-\frac{\ln 2}{15}\cdot 10} =$$

$$\boxed{= 6{,}09\cdot 10^{17}\ \text{àtoms/s}}$$, també d'acord amb [4*].

Vegem, per completesa, que l'argument que hem donat per a justificar el càlcul de dB/dt mitjançant A es pot veure recolzat de manera totalment rigorosa per un argument algebraic a partir de la derivada [*, * bis]:

$$\boxed{\frac{dB}{dt}} = N_0 \cdot 2^{-t/T} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{T} \ln 2\right)}_{=\lambda} = N_0 \cdot \left(e^{\ln 2}\right)^{-t \cdot \frac{1}{\ln 2}} \cdot \lambda = @$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\lambda}{\ln 2} \qquad 2 = e^{\ln 2}$$

$$[@] = \underbrace{N_0 \cdot e^{-\cancel{\ln 2} \cdot t \cdot \frac{\lambda}{\cancel{\ln 2}}}}_{=N} \cdot \lambda = \boxed{A}$$, com abans havíem raonat de paraula.

3. [Dee] Problemes de desintegracions radiactives del llibre:

3.a) [③ p. 299] El nombre de nuclis d'una mostra radioactiva es redueix a set vuitenes parts del seu valor inicial en 1,54 dies. Troba: **a)** la constant radioactiva; **b)** el període de semidesintegració. **Ajuda:** veure l'exemple ① de p. 299

3.b) [⑲ p. 310] Període de semidesintegració del radó-222: $T = 3{,}82$ dies; massa atòmica: $M = 222{,}0175$ u.

a) Calcula temps en què una mostra de 2 mg de radó es redueixi a 0,25 mg;

b) Calcula els valors de l'activitat inicial i final.

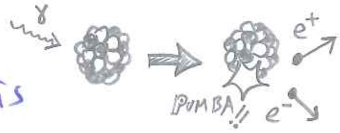
Ajuda: veure l'exemple Ⓐ de p. 310

E. PIA SABADELL

[29 - V - 14; dj]

F2

EXERCICIS



XII / XIV '14 — VII / XVII

« Llei de DESINTEGRACIÓ »

⊕ resum logaritmes; reaccions nuc.

3.c) [⑳ p.310] Mostra de 2 mg de poloni-210 en 276 dies es redueix a 0,5 mg. Troba:

a) el T del poloni-210

b) l'activitat inicial i final

DADA: M(poloni-210) = 209,9829 u

Ajuda: veure l'exemple Ⓐ de p. 310

RESOLUCIONS:

3.a (a) $N(1{,}54 \text{ dies}) = \frac{7}{8} N_0 \rightarrow \frac{7}{8} \cancel{N_0} = \cancel{N_0}\, e^{-\lambda t} \rightarrow$ $(1{,}54 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s})$

$\rightarrow e^{\lambda t} = \frac{8}{7} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{8}{7}} =$

$= \frac{\ln 8/7}{1{,}54 \cdot 24 \cdot 3600} = \boxed{1{,}004 \quad s^{-1}}$

(b) $\boxed{T = \frac{\ln 2}{\lambda}} = \frac{\ln 2}{1{,}004} = 6{,}91 \cdot 10^5 \text{ s} = \boxed{7{,}99 \text{ dies}}$

3.b $\boxed{m(t) = m_0\, e^{-\lambda t}}$; $m(t)$: 0,25 mg ; m_0: 2 mg ; $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{3{,}82} \text{ dies}^{-1}$

$\longrightarrow$ (a) $0{,}25 = 2\, e^{-\frac{\ln 2}{3{,}82} t} \rightarrow (*)$

veure [3*] p. iii. anvers per a justificació d'aquesta fórmula a partir de la llei $N = N_0 e^{-\lambda t}$

$[*] \rightarrow e^{\frac{\ln 2}{3{,}82} t} = \frac{2}{0{,}25} = 8 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{t = \frac{3{,}82}{\ln 2} \cdot \ln 8} = \boxed{11{,}46 \text{ dies}}$

(b) $\boxed{A_0 = \lambda \cdot N_0} = \frac{\ln 2}{3{,}82} \cdot \frac{1}{24 \cdot 3600} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \frac{1}{222{,}0175} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = (*)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{3{,}82} \text{ dies}^{-1} = \frac{\ln 2}{3{,}82} \frac{1}{24 \cdot 3600} \text{ s}^{-1} \quad (*,*) \\ N_0 (\text{àtoms}) = m_0 (g) \cdot \frac{1}{M[u]} (mol/g) \cdot N_A \text{ (àtoms/mol)} = \\ = 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{222{,}0175} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ àtoms} \end{array} \right.$$

$[*] = \boxed{1{,}14 \cdot 10^{13} \text{ Bq}}$

$\boxed{A(11{,}46 \text{ dies}) = \lambda \cdot N(11{,}46 \text{ dies})} \overset{[*,*]}{=} \frac{\ln 2}{3{,}82} \cdot \frac{1}{24 \cdot 3600} \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-3} \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}}{222{,}0175} = (3*)$

$$\left(\begin{array}{l} N(t = 11{,}46 \text{ dies}) = m(t = 11{,}46 \text{ dies}) \cdot \frac{1}{M[u]} \cdot N_A = \\ \quad (\text{enunciat: } 0{,}25 \cdot 10^{-3} \, g) \\ = 0{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{222{,}0175} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ àtoms} \end{array} \right)$$

$[3*] = \boxed{1{,}42 \cdot 10^{12} \text{ Bq}}$

Nota: el càlcul es podia simplificar molt si veiem que

$$\left| \begin{array}{l} A_0 = \lambda N_0 = \lambda m_0 \frac{N_A}{M} \\ \boxed{A} = \lambda N = \lambda m \frac{N_A}{M} = \lambda \frac{m_0}{8} \frac{N_A}{M} = \boxed{\frac{A_0}{8}} \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{m}{m_0} = \frac{0{,}25}{2} = \frac{1}{8} \rightarrow m = \frac{m_0}{8} \right)$$

3.c

(a) $\underbrace{0{,}5}_{m} = \underbrace{2}_{m_0} e^{-\underbrace{\frac{\ln 2}{T}}_{\lambda} \cdot \underbrace{275}_{t}} \rightarrow \frac{\ln 2}{T} 275 = \ln \frac{2}{0{,}5} = \ln 4 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{T = \frac{\ln 2}{\ln 4} 275 = 137{,}5 \text{ dies}}$

E. PIA SABADELL

[29-V-14; Dj]

F2

^4_2He 

viii / xvii

EXERCICIS

« LLEI de DESINTEGRACIÓ »

⊕ resum de logaritmes; reaccions nuc.

(b) $\boxed{A_0 = \lambda N_0} = \dfrac{\ln 2}{T} m_0 \dfrac{1}{M[u]} N_A = \dfrac{\ln 2}{137{,}5 \cdot 24 \cdot 3600} \dfrac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}}{209{,}9829} =$

$= \boxed{3{,}3 \cdot 10^{11} \text{ Bq}}$ (*)

$\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{0{,}5}{2} = \dfrac{1}{4}$

$\boxed{A(276 \text{ dies})} = \lambda N(276 \text{ dies}) = \lambda\, m(276 \text{ dies}) \dfrac{N_A}{M[u]} = \lambda \dfrac{m_0}{4} \dfrac{N_A}{M[u]} =$

$= \dfrac{A_0}{4} \overset{[*]}{=} 3{,}3 \cdot 10^{11} / 4 = \boxed{8{,}4 \cdot 10^{10} \text{ Bq}}$

---

4. [D/N] Problemes de reaccions nuclears del llibre i de reaccions nuclears ⊕ desintegracions radioactives de la SELE: (Veure RESUM teoria REACCIONS NUCLEARS: p. x. revers / p. xi. anvers)

4.a) [11 p. 303] L'urani 238 captura un neutró i emet dues partícules β. Escriu les reaccions nuclears que hi tenen lloc (Z(urani) = 92).

4.b) [13 p. 305] Estima quina quantitat d'urani 235 consumeix en un any un reactor nuclear de 1 200 MW de potència. Ajuda: en el procés $^{235}_{92}U + ^1_0n \rightarrow ^{141}_{56}Ba + ^{92}_{36}Kr + 3\,^1_0n$, $Q = 200$ MeV

4.c) [18 p. 307] Troba la freqüència mínima que ha de tenir un fotó per a generar un parell protó anti-protó. DADES: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s. Ajuda: veure l'exemple 4 de p.307

4.d) [(21) p. 310] Determina l'isòtop que falta en les següents reaccions nuclears i digues de quin tipus de reacció es tracta:

a) $^{27}_{13}Al + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{A}_{Z}X + ^{1}_{0}n$

b) $^{14}_{7}N + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{A}_{Z}X$

[Ajuda: vegeu l'exemple (B) de p. 310]

4.e) [(22) p. 310] Donada la reacció nuclear $^{1}_{1}H + ^{3}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He$, determina:

a) de quin tipus de reacció es tracta

b) l'energia alliberada per àtom de $^{1}_{1}H$.

DADES: $M(^{1}_{1}H) = 1{,}0078\ u$, $M(^{3}_{1}H) = 3{,}0160\ u$, $M(^{4}_{2}He) = 4{,}0026\ u$.

[Ajuda: vegeu l'exemple (B) de p. 310]

4.f) [(23) p. 311] Un nucli d'urani-235 pot experimentar una fissió quan es bombardeja amb un neutró i formar estany-132 i molibdè-101. Escriu la reacció nuclear que hi té lloc i determina el nombre de neutrons alliberats en el procés. ($Z(U) = 92$; $Z(Sn) = 50$; $Z(Mo) = 42$).

4.g) [(24) p. 311] Suposant que l'energia alliberada en la fissió de l'urani-235 és de 210 MeV/nucli, calcula la massa d'urani consumida en un dia per un reactor atòmic de 6 700 kW de potència i rendiment igual al 58 %.

[Ajudes: (1a): el "rendiment" vol dir que les despeses energètiques necessàries per a mantenir el reactor en funcionament fan que, de tota l'energia alliberada en les reaccions, només en quedi una quantitat neta del 58 %. (2a): vegeu el problema (4.b).]

E. PIA SABADELL

[29 - V - 14 ; dj]

F2

EXERCICIS

« LLEI de DESINTEGRACIÓ »

⊕ resum logaritmes; reaccions nuclears.

$^{228}_{88}Ra \rightarrow {}^{228}_{89}Ac + \beta$

4.h) [(25) p. 311] Per a la següent reacció nuclear:

$${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{1}_{1}H \qquad E = 4{,}03 \text{ MeV}$$

a) Determina l'isòtop que falta i digues de quin tipus de reacció nuclear es tracta.

b) Calcula l'energia alliberada en la formació d'1,5 kg de l'isòtop desconegut.

Ajuda: veure l'exemple (D) de p. 311

4.i) [(26) p. 311] En la següent reacció nuclear desconeixem un dels isòtops inicials: ${}^{2}_{1}H + {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n \qquad E = 17{,}59$ MeV

a) Determina l'isòtop que falta i digues de quin tipus de reacció nuclear es tracta.

b) Calcula l'energia alliberada en la formació de 3 kg del producte final.

4.j) [PAU: set'13, S1-B3] → COMPTE ⚠: a l'enunciat del problema, tal qual hi és al web de l'xtec, hi ha una errada: l'isòtop del iode és amb A = 131, i no 123.

El iode-131 és una font de raigs gamma, i té un període de semidesintegració de 13,2 h. En radiomedicina, s'injecta al pacient per a poder obtenir "imatges gammagràfiques".

a) Quina fracció de ${}^{131}_{53}I$ resta al cos 24,0 hores després d'injectar el fàrmac?

b) També existeix un altre procés nuclear on el ${}^{131}_{53}I$ produeix ${}^{131}_{54}Xe$. Escriviu l'esquema del procés nuclear; quina partícula s'emet?

4.k) [PAU: juny'13, S4-A4] Els primers àtoms d'americi-241 ($Z(Am) = 95$) van ser produïts el 1944 fent servir un seguit de reaccions nuclears a partir del plutoni (Pu). Heus aquí les últimes dues etapes del procés:

$$^{240}_{94}Pu + ^{a}_{b}X \rightarrow ^{241}_{94}Pu$$

$$^{241}_{94}Pu \rightarrow ^{241}_{95}Am + ^{c}_{d}Y$$

a) Determineu a, b, c i d. Quin nom té la partícula que el Pu-240 ha capturat en la 1a reacció? Com s'anomena la desintegració descrita en la 2a?

b) Calculeu el percentatge de nuclis de Am-241 que s'han desintegrat des del 1944 fins ara.

<u>DADA</u>: $t_{1/2}(Am) = 432$ anys (nota: $t_{1/2}$ és el període de semidesintegració, que també denotem com T).

4.l) [PAU: juny'13, S4-B4] La desintegració del $^{40}_{19}K$ (potassi) en $^{40}_{18}Ar$ (argó) s'usa per a calcular l'edat d'algunes roques i minerals. Quan els minerals que contenen potassi cristal·litzen, els nous minerals contenen $^{40}_{19}K$ i no $^{40}_{18}Ar$: en aquest moment el "rellotge potassi-argó" comença a funcionar. A partir d'aleshores, el $^{40}_{19}K$ es va desintegrant, i tots els àtoms de $^{40}_{18}Ar$ que trobem en el mineral en un temps posterior a la formació provenen de la descomposició del $^{40}_{19}K$.

a) Escriviu la reacció nuclear de l'emissió β del $^{40}_{19}K$.

b) En una roca trobem 10,0 g de $^{40}_{19}K$ i 10,0 g de $^{40}_{18}Ar$. Quina quantitat de $^{40}_{19}K$ hi haurà quan hauran transcorregut $5{,}00 \cdot 10^{9}$ anys? Fent ↘

servir la datació radiomètrica basada en el K-Ar, digueu quina edat té la roca. (Considereu que el $^{40}_{19}K$ es desintegra només en $^{40}_{18}Ar$).

DADA: Període de semidesintegració del $^{40}_{19}K \rightsquigarrow t_{1/2} = 1{,}25 \cdot 10^9$ anys

4.m) [PAU: juny'13, S3 - B3] El poloni - 210 és un emissor α. Període de semidesintegració i nombre atòmic del poloni:

$$T = 138 \text{ dies}; \qquad Z(Po) = 84.$$

a) Escriviu la reacció de desintegració del poloni - 210 si sabem que, en desintegrar-se, produeix un isòtop del plom (Pb). Quina és la constant de desintegració del poloni - 210? $Z(Pb) = 82$.

b) Si una mostra conté 5 mg de poloni 210, quina quantitat en quedarà després de 20 dies?

4.n) [PAU: 2010 - exemple de prova ajustada a la nova estructura: opció B, pregunta 3]

S'ha mesurat l'activitat d'una mostra d'un os trobat en un jaciment arqueològic i s'ha obtingut un valor de $15{,}0 \cdot 10^3$ desintegracions per dia. Aquest fet es fa servir per a saber l'antiguitat de l'os, ja que el $^{14}_{6}C$ és un isòtop que emet partícules β^- amb un període de semidesintegració de $5{,}73 \cdot 10^3$ anys.

Un os actual de la mateixa massa que l'os trobat en el jaciment té una activitat de $22{,}1 \cdot 10^3$ desintegracions per dia.

a) Completa l'equació de desintegració del ↘

$^{14}_{6}C$:

$$^{14}_{6}C \rightarrow \, ^{?}_{?}N + \, ^{?}_{?}?$$

b) Calcula l'antiguitat de l'os.

RESOLUCIONS :

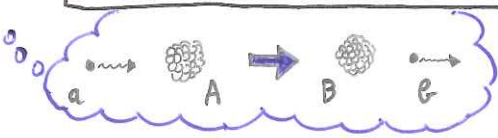
4.a/ Resolem aquest problema fent ús de les diferents reaccions nuclears que coneixem, així com les lleis de conservació dels nombres màssic i atòmic totals :

[REACCIONS estudiades :]

• **bombardeig :**

(3) $A + a \rightarrow B + b$

A: nucli "blanc"; a: partícula lleugera "projectil"; B: nucli (producte); b: partícula lleugera (emesa)



[LLEIS de CONSERVACIÓ :]

A_{TOTAL} : $\boxed{A_T = A'_T}$ (1)

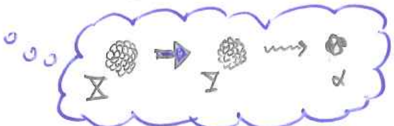
A_T: suma dels A dels reactius; A'_T: suma dels A dels prods

Z_{TOTAL} : $\boxed{Z_T = Z'_T}$ (2)

• **desintegracions naturals :**

"LLEI de SODDY"

(4) – emissió α : $$\underbrace{^{A}_{Z}X}_{\text{nucli "pare"}} \longrightarrow \underbrace{^{A-4}_{Z-2}Y}_{\text{nucli "fill"}} + \underbrace{^{4}_{2}He}_{\text{partícula } \alpha \text{ emesa}}$$

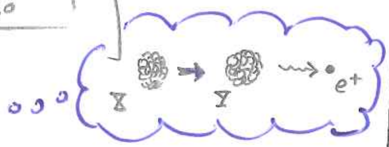


"LLEI de FAJANS"

(5) – emissió β : (ó "β^-") $$\underbrace{^{A}_{Z}X}_{\text{nucli "pare"}} \longrightarrow \underbrace{^{A}_{Z+1}Y}_{\text{nucli "fill"}} + \underbrace{^{0}_{-1}e}_{\text{partícula } \beta^- \text{ emesa}}$$

partícula β^+ emesa

(6) – emissió β^+ : $$^{A}_{Z}X \longrightarrow \, ^{A}_{Z-1}Y + \, ^{0}_{1}e$$



(**NOTA**: la vida mitjana d'un nucli emissor α ó β es calcula amb la constant λ de la seva corresponent llei de desintegració exponencial : $\tau = \frac{1}{\lambda}$)

E. PiA SABADELL

[29 - V - 14 ; dj]

F2

EXERCICIS

$v < c$

$E_0 = m_0 c^2$

$E_c = m_0 (\gamma - 1) c^2$

$E = E_0 + E_c = m_0 \gamma c^2$

WZWR'14

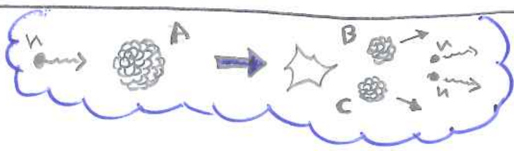
XI / XVII

« Llei de DESINTEGRACIÓ »

⊕ resum logaritmes ; reaccions nuclears

---

(7) • reaccions nuclears de fissió :



$$\underbrace{A}_{\text{nucli pesant}} + \underbrace{n}_{\text{neutró "projectil"}} \longrightarrow \underbrace{B + C}_{\text{dos nuclis lleugers:}} + \underbrace{k\, n}_{k \text{ neutrons (emesos)}}$$

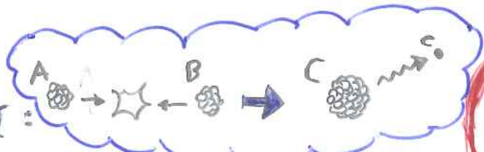
nucli pesant: que és "fissionat"

neutró "projectil"

dos nuclis lleugers: producte de la fissió

k neutrons (emesos) → típicament, se n'emeten $k = 2$ ó 3

(8) • reaccions nuclears de fusió :



$$\underbrace{A + B}_{\text{dos nuclis lleugers:}} \longrightarrow \underbrace{C}_{\text{nucli pesant:}} + \underbrace{c}_{\text{partícula/es emesa/es}}$$

dos nuclis lleugers: es fusionen

nucli pesant: resultat de la fusió

partícula/es emesa/es → per exemple, un n o un p

INFORMACIÓ ADDICIONAL (útil per a futurs problemes):

• Energia alliberada en una reacció:

(9) $$\boxed{Q = \Delta m \cdot c^2} = \underbrace{\left(\left\{ \text{suma masses reactius} \right\} - \left\{ \text{suma masses productes} \right\} \right)}_{\text{"defecte de massa"}} \cdot c^2$$

energia alliberada: la massa que es perd es converteix en energia alliberada

"defecte de massa" (massa que es perd en la reacció).

– Si la reacció és la de formació d'un **nucli**, ens permet calcular l'energia d'enllaç: $$\boxed{Q_{en} = \left([Z m_p + (A-Z) m_n] - M_{nucli} \right) \cdot c^2}$$ (10)

(11) $\Longrightarrow \boxed{Q_1 = \dfrac{Q_{en}}{A}}$ ⇝ "energia d'enllaç per nucleó": és l'energia mitjana que cal aportar per a alliberar un nucleó: quan més gran és Q_1, més costa ⇒ més estable és el nucli.

• ALGUNES dades:

(12)
- $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (velocitat de la llum en el buit)
- $1\,\text{eV} = 1{,}6019 \cdot 10^{-19}$ J
- $1\,\text{MeV} = 1{,}6019 \cdot 10^{-13}$ J

} unitat d'energia típiques en Física Atòmica i Nuclear.

↳ ...tornant al nostre problema 4.a: veiem que en cap de les reaccions catalogades a classe tenim el procés "captura d'un neutró per un nucli pesant". En canvi, el procés en què l'urani és impactat pel neutró i emet una partícula β sí respon a l'esquema [3] (pàg. x. revers), és a dir: a un bombardeig d'un nucli pesant ($^{238}_{92}U$, en aquest cas) per una partícula lleugera ($^1_0 n$), amb la consegüent emissió d'una altra partícula lleugera (la β, o sigui un electró: $\beta = \beta^- = {}^{0}_{-1}\beta = = e^- = {}^{0}_{-1}e$, segons diferents notacions emprades):

eq. de bombardeig: $\underset{\text{blanc}}{A} + \underset{\text{projectil}}{a} \longrightarrow \underset{\text{producte o "residu"}}{B} + \underset{\text{emissió}}{b}$

↓

particularitzat al nostre cas: $\boxed{^{238}_{92}U + {}^1_0 n \longrightarrow {}^A_Z X + {}^{0}_{-1}e}$ 1r procés.

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{per conservació del } A_{TOT}: \underbrace{\overset{\text{A de l'U}}{238} + \overset{\text{A del n}}{1}}_{A_T} = \underbrace{A + \overset{\text{A del }\beta}{0}}_{A'_T} \Longrightarrow \boxed{A = 239} \\ \text{per conservació del } Z_{TOT}: \underbrace{\underbrace{92}_{\text{Z de l'U}} + \underbrace{0}_{\text{Z del n}}}_{Z_T} = \underbrace{Z \underbrace{- 1}_{\text{Z del }\beta}}_{Z'_T} \Longrightarrow \boxed{Z = 93} \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

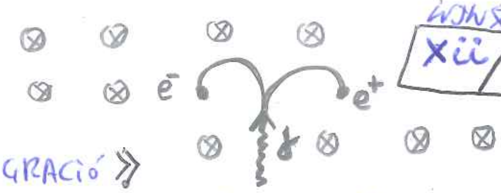
$\Longrightarrow$ $X = Np$ (neptuni), i es tracta del seu isòtop $\boxed{^A_Z X = {}^{239}_{93}Np}$

Comentaris: i) amb escriure la reacció així:

$$^{238}_{92}U + {}^1_0 n \rightarrow {}^{239}_{93}X + {}^{0}_{-1}e$$

ja va bé en un examen, doncs ningú està obligat a saber-se de memòria el Z de cada element.

ii) malgrat que l'absorció del neutró per l'urani no està, com hem dit, al nostre "catàleg" de reaccions, també és



vàlida la resposta :

$$\boxed{{}^{238}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{239}_{92}U \rightarrow {}^{239}_{93}Np + \beta}$$

1r procés (versió detallada)

... que no és altra cosa que donar més detalls sobre com té lloc el procés.

iii) ara hem d'escriure encara una altra reacció per a l'emissió de la segona partícula β. Ho fem així, en comptes d'escriure una única reacció en què s'emetin alhora les dues β, perquè entre les reaccions que hem vist a classe aquest procés no hi és (no es troba "al nostre catàleg", diguem-ne). Això és així, evidentment, perquè és un procés que no es dóna mai a la natura (o, millor dit: que no es dóna quasi mai, i per tant no entra en el conjunt de processos que estudiem en 2n Bat.).

Així doncs, la segona emissió s'escriuria així:

2n procés

$$\boxed{{}^{239}_{93}Np \rightarrow {}^{239}_{94}X + \beta}$$

(que no és altra cosa que la llei de Fajans β^- per al ${}^{239}Np$, com abans l'hem escrita per al ${}^{239}U$)

Si mirem un sistema periòdic, veurem que l'isòtop final produït seria ${}^{239}_{94}X = {}^{239}_{94}Pu$.

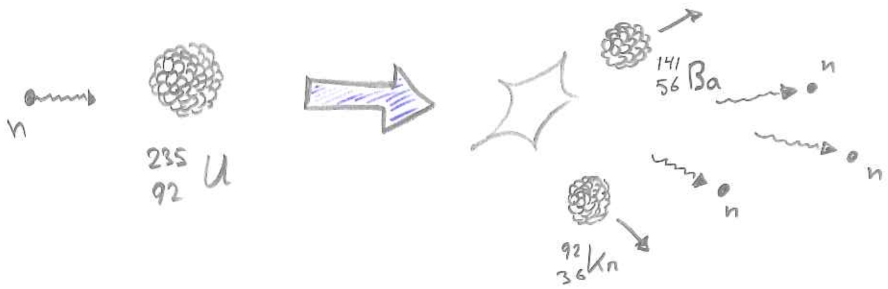
NOTA: així doncs, en realitat hom podria dir (i, seril rigorosos, amb raó) que aquí es comet un abús del llenguatge, doncs quan diem que l'urani "captura un neutró" i "emet dues partícules β", en realitat això últim no és del tot cert, atès que la segona β és un nucli de Np qui l'emet.

4.b/ $\boxed{Pot} = \dfrac{\Delta E}{\Delta t} = \dfrac{N \cdot Q}{\Delta t} = (*,*)$

l'energia generada es correspon a la quantitat de nuclis que han sigut fissionats multiplicada per l'energia alliberada en la fissió d'un nucli:

$$\boxed{\Delta E = N \cdot Q} = (*)$$

Suposarem que totes les fissions tenen lloc segons el procés que l'enunciat ens dóna com a pista,



... reacció en la qual s'allibera una energia de 200 MeV, corresponent al defecte de massa del procés, i que escriurem en unitats S.I. així:

$$Q = 200 \cdot 1,6019 \cdot 10^{-13} \ \mathrm{J/nucli}\ ^{235}U \ ;$$ com que

$$N = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(nombre de mols)}}}{\mu} \cdot N_A, \quad \text{llavors:} \quad \boxed{[*] = \mu\,[\mathrm{mols}] \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 200 \cdot 1,6019 \cdot 10^{-13} \ \mathrm{J}}$$

$$[*,*] = \boxed{\frac{\mu\,[\mathrm{mols}] \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 200 \cdot 1,6019 \cdot 10^{-13}}{365 \cdot 24 \cdot 3600}} = \boxed{\mu\,[\mathrm{mols}] \cdot 6,118 \cdot 10^{5} \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{s}}}$$

($\Delta t = 1$ any $= 365 \cdot 24 \cdot 3600$ segons)

$$\Rightarrow \mu = \frac{Pot}{6,118 \cdot 10^5 \ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot s^{-1}}} = \frac{1200 \cdot 10^6 \ \overset{= \cancel{\mathrm{J}} \cdot \cancel{\mathrm{s}^{-1}}}{\mathrm{W}}}{6,118 \cdot 10^5 \ \cancel{\mathrm{J}} \cdot \mathrm{mol^{-1}} \cdot \cancel{\mathrm{s}^{-1}}} =$$

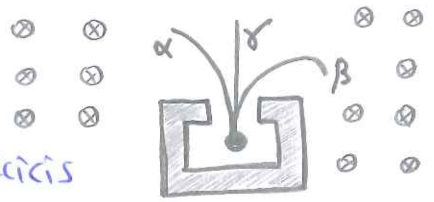
$$= 1961 \ \mathrm{mols} \Rightarrow \boxed{m} = 1961 \ \mathrm{mols} \cdot \underbrace{235 \ \mathrm{g/mol}} \cdot 10^{-3} \ \mathrm{kg/g} = \boxed{461 \ \mathrm{kg}.}$$

estimem la $M[^{235}U]$ expressada en u com el seu nº màssic $A = 235$: és a dir: negligim la contribució dels electrons, de l'energia d'enllaç dels electrons, i el defecte de massa del nucli, doncs estem fent un càlcul només estimatiu.

E. PiA SABADELL

[29 - V - 14; dj]

F2



'14

XIII / XVII

EXERCICIS

«LLEi de DESINTEGRACIÓ»

⊕ resum logaritmes; reaccions nuclears

4.c/ Creació d'un parell protó-antiprotó:

$$\boxed{\gamma \rightarrow p + \bar{p}}$$

Tot i no ser exactament aquesta reacció, amb rigor, una reacció nuclear, el mètode per a fer el balanç d'energies és anàleg: entendrem que l'energia mínima del fotó és aquella amb la qual p i $\bar{p}$ queden en repòs, i per tant les seves energies cinètiques són zero i l'única contribució a E' dels productes és la de les seves masses:

CONSERVACIÓ de L'ENERGIA ⟺ $\boxed{\underbrace{E_T}_{E_\gamma = hf} = E'_T} = m_p c^2 + m_{\bar{p}} c^2 = \boxed{2 m_p c^2}$

$m_p = m_{\bar{p}}$: són antipartícules!

$E_\gamma = \boxed{hf}$ ⟸ energia d'un fotó de freqüència f

⟹ Tot plegat,

$$\boxed{f^{min}} = \frac{2 \cdot m_p \cdot c^2}{h} = \frac{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{6{,}62 \cdot 10^{-34}} =$$

$$= \boxed{4{,}54 \cdot 10^{23} \text{ Hz}}$$

4.d/ (a) $^{27}_{13}Al + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{A}_{Z}X + ^{1}_{0}n$

Conservació de
$$\left\{\begin{array}{l} A_T: \ 27 + 4 = A + 1 \Rightarrow A = 27+4-1 = 30 \\ Z_T: \ 13 + 2 = Z + 0 \Rightarrow Z = 13+2 = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{^{A}_{Z}X = ^{30}_{15}X} = ^{30}_{15}P$$

(si no es té davant un sistema periòdic, no cal identificar el P).

Es tracta d'una reacció de bombardeig de nuclis d'alumini-27 amb partícules α.

(b) $^{14}_{7}N + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{A}_{Z}X$

lleis cons.: $\left.\begin{array}{l} 14 + 1 = 4 + A \\ 7 + 1 = 2 + Z \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{^{A}_{Z}X = ^{11}_{6}X} = ^{11}_{6}C$.

Es tracta d'una reacció de bombardeig de nuclis de nitrogen-14 amb protons.

4.e $^{1}_{1}H + ^{3}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He$

(a) Es tracta d'una reacció de fusió, en la qual un nucli d'hidrogen-1 es fusiona amb un nucli de triti per a donar un nucli d'heli-4.

(b) $$\boxed{\underbrace{Q}_{\substack{\text{energia}\\\text{alliberada}\\\text{en la reacció}}} = \underbrace{\Delta m}_{\substack{\text{"defecte de massa", o}\\\text{massa perduda en la}\\\text{reacció}}} \cdot c^2} = \left(\{\text{massa total reactius}\} - \{\text{massa total productes}\} \right) \cdot c^2 =$$

$$= \left(\left[m(^{1}_{1}H) + m(^{3}_{1}H) \right] - m(^{4}_{2}He) \right) \cdot c^2 =$$

$$= \left(1{,}0078\ u + 3{,}0160\ u - 4{,}0026\ u \right) \cdot \frac{10^{-3}}{6{,}022 \cdot 10^{23}} \left(\frac{kg}{u}\right) \cdot 9 \cdot 10^{16}\ (m^2 \cdot s^{-1}) =$$

$$\boxed{= 3{,}17 \cdot 10^{-12}\ J} = 3{,}17 \cdot 10^{-12}\ (J) \ /\ 1{,}6019 \cdot 10^{-13}\ (J/MeV) =$$

$$\boxed{= 19{,}8\ MeV}$$

NOTA: ~~nota~~: és evident que aquesta energia s'allibera cada vegada que es consumeix un àtom de $^{1}_{1}H$ — com ens demana l'enunciat —, atenent a que és l'energia alliberada per cada reacció, i en cada reacció se'n consumeix un.

4.f) $$\boxed{^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{132}_{50}Sn + ^{101}_{42}Mo + k\ ^{1}_{0}n}$$

per a escriure aquesta equació hem adaptat, senzillament, l'esquema general [7] (pàg. xi. anvers) d'una reacció de fissió a la situació que ens planteja l'enunciat.

E. PIA SABADELL

[29 - V - 14; dj]

F2

EXERCICIS

« LLEI de DESINTEGRACIÓ »

⊕ resum logaritmes; reaccions nuclears

10/XI/14

XIV / XVII

La nostra incògnita, ara, és la k: el nombre de neutrons emesos, i la trobem aplicant la conservació de l'A_{TOT}:

$$235 + 1 = 132 + 101 + k \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 236 - \underbrace{(132 + 101)}_{233} = 3 \text{ neutrons}},$$

i la reacció nuclear completa queda: ${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{132}_{50}Sn + {}^{101}_{42}Mo + 3\,{}^{1}_{0}n$

4.g/

$$\boxed{P_{ot} = \frac{\Delta E}{\Delta t}}$$

$\Delta E \rightarrow$ rendiment 58% $\rightarrow \underbrace{\Delta E}_{\text{energia neta que es produeix}} = 0{,}58 \cdot \underbrace{\Delta E_{reac}}_{\text{energia que es produeix a les reaccions.}}$

P_{ot}: $6\,700 \cdot 10^3$ W

Δt: 1 dia: $24 \cdot 3600$ s

$$6\,700 \cdot 10^3\ \text{W} = \frac{0{,}58 \cdot 210\ (\text{MeV/nucli}) \cdot 1{,}6019 \cdot 10^{-13}\ (\text{J/MeV}) \cdot N}{24 \cdot 3600\ (\text{s})} \Rightarrow$$

N: nº de nuclis consumits

$$\Rightarrow \boxed{N = \frac{6\,700 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 3600}{0{,}58 \cdot 210 \cdot 1{,}6019 \cdot 10^{-13}} = 2{,}97 \cdot 10^{22} \text{ nuclis}};$$

$$\boxed{m\ (g) = \frac{N}{N_A} \cdot M(u) = \frac{2{,}97 \cdot 10^{22}}{6{,}022 \cdot 10^{23}} \cdot 235 = 11{,}6\ g}$$

$M(u)$: com que l'enunciat no ens dóna la massa atòmica de l'urani, però sí el seu $\boxed{A = 235}$, aproximem $\boxed{M(u) \simeq A}$ — la qual cosa equival a l'aproximació de considerar que cada nucleó "pesa" 1 u, i a negligir el defecte de massa causat per l'enllaç nuclear, així com la contribució dels electrons a la massa de l'àtom —.

4.h/ $^2_1H + ^2_1H \to ^A_ZX + ^1_1H$ $E = 4.03$ MeV

(a)

$$\left.\begin{array}{l} 2+2 = A+1 \\ 1+1 = Z+1 \end{array}\right\} \to \boxed{^A_ZX = ^3_1X = ^3_1H}$$

⟵ aquest element sí hem de reconèixer-lo sense mirar el sistema periòdic: $Z=1 \Leftrightarrow$ hidrogen. El nom de l'isòtop (hidr.-3) és "triti".

La reacció és de fusió (dos deuteris es fusionen per a formar triti).

(b) Formació d'un $^3_1H \leftrightarrow$ 1 reacció $\leftrightarrow$ $E = 4{,}03$ MeV alliberats. (el que solem denominar "Q")

$\downarrow$

Formació d'un mol de ^3_1H: $\boxed{E_{mol} = N_A \cdot E}$ (*,*)

$$\boxed{\underset{\text{mols}}{\mu}\,(1{,}5 \text{ kg de } ^3_1H)} = 1{,}5 \cdot 10^3 \text{ g } \frac{1}{\underbrace{M(^3_1H)}_{\text{expressat en u}} \text{ g/mol}} = (*)$$

$$(*) = 1{,}5 \cdot 10^3 \text{ g } \frac{1 \text{ mol}}{3 \text{ g}} = \boxed{5 \cdot 10^2 \text{ mols}} \Rightarrow$$

($M(^3_1H) \simeq A = 3$ u, com solem fer aproximadament quan necessitem la massa atòmica d'un isòtop i l'enunciat no en la dóna.)

$$\Rightarrow \boxed{E_{TOT}} = \mu \cdot E_{mol} \overset{[*,*]}{=} 5 \cdot 10^2 \cdot N_A \cdot E =$$

$$= 5 \cdot 10^2 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot 4{,}03 = \boxed{1{,}21 \cdot 10^{27} \text{ MeV}}$$

4.i/ $^2_1H + ^A_ZX \to ^4_2He + ^1_0n$ $E = 17{,}59$ MeV

(a)

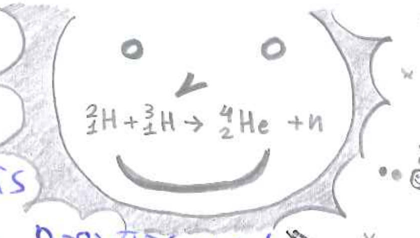
$$\left.\begin{array}{l} 2+A = 4+1 \\ 1+Z = 2+0 \end{array}\right\} \to \boxed{^A_ZX = ^3_1X = ^3_1H}$$

La reacció és de fusió de triti amb deuteri per a donar heli-4.

E. PiA SABADELL

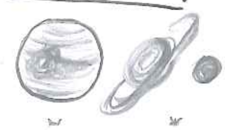
$\boxed{29 - V - 14;\ dj}$

F2



[illegible]'14

XV / XVII



EXERCICIS

« Llei de DESINTEGRACIÓ »

⊕ resum de logaritmes; reaccions nuclears

(b) entendrem que l'heli-4 és el "producte final" (sense incloure, doncs, els neutrons emesos en aquests 3 kg), i farem, com sempre, l'aproximació de

$$M(^4_2He) \cong A(^4_2He) = 4\ u \text{, i per tant}$$

el factor de conversió g $\longleftrightarrow$ mols serà: $\boxed{4\ g/mol}$.

Així doncs, contestarem al que ens demana l'enunciat transformant els 3 kg produïts en la corresponent energia aplicant els factors de conversió adequats (aquesta és la manera més pràctica de procedir, una vegada s'ha entès el raonament que hi ha darrere):

$$\boxed{E} = 3\cdot 10^3\ g \cdot \frac{1\ mol}{4\ g} \cdot \frac{6{,}022\cdot 10^{23}\ \cancel{nuclis}}{1\ mol} \cdot 1\ \frac{\text{reacció}}{\cancel{\text{nucli}}} \cdot 17{,}59\ \frac{MeV}{\text{reacció}} =$$

$$= \boxed{7{,}94\cdot 10^{27}\ MeV} = 7{,}94\cdot 10^{27}\ MeV \cdot 1{,}6019\cdot 10^{-13}\ J/MeV =$$

$$= 1{,}27\cdot 10^{15}\ J$$

← per a entendre què significa aquesta quantitat d'energia, recordem quanta energia s'ha d'invertir en elevar 1 kg a una $h = 1$ m des del terra a la superfície terrestre: $\boxed{\Delta E_p = mgh - mg\underbrace{h_0}_{0} = mgh} =$

$= 1 \cdot 9{,}8 \cdot 1 = 9{,}8\ J$ $\Longrightarrow$ per tant, l'energia alliberada a una estrella quan "crema" deuteri i triti suficient per a produir només 3 kg d'heli és la mateixa que la que necessitem per a elevar 1 m una massa de $1{,}3\cdot 10^{14}$ kg (130 milions de milions de kilos) des del terra.

4.j/ $T\left({}^{131}_{53}I\right) = 13{,}2\ h$

(a) $\boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = N_0 (\underbrace{e^{\ln 2}}_{=2})^{-t/T} = \boxed{N_0 \cdot 2^{-t/T}} \Rightarrow$

$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$

$e^{p \cdot q} = (e^p)^q$

$\Rightarrow \boxed{\frac{N}{N_0} = 2^{-t/T}} = 2^{-\frac{24}{13,2}} = \boxed{0{,}284} \Rightarrow$ N'hi queda el 28,4 %.

fracció que l'enunciat ens demana: les que queden (N) dividit les inicials (N_0)

(b) Podríem pensar que l'enunciat no ens dóna dades suficients per a procedir, però l'estratègia a considerar quan ens enfrontem a problemes de completar reaccions nuclears en la SELE i/o 2n Bat. és sempre la mateixa i ens simplifica molt el camí: hem de pensar que només ens apareixeran les poques reaccions que tenim estudiades i "catalogades" (és a dir: les [3], [4], [5], [6], [7] i [8] de pàgs. X.xxv i xi.xxv). Per tant, convé sempre buscar l'esquema de reacció més senzill d'entre tots aquests que s'adapti al que l'enunciat ens demana.

En el nostre cas, una emissió radioactiva natural (β, β^+ ó α, això encara no ho sabem) sembla l'esquema que més senzillament s'ajusti al que l'enunciat ens proposa:

$$\underbrace{A}_{\text{nucli "pare"}} \longrightarrow \underbrace{B}_{\text{nucli "fill"}} + \underbrace{b}_{\text{partícula emesa}}$$

partícula emesa → ó "radiació": α, β^-, β^+ (γ no les solem considerar en SELE/2n Bat., perquè no van soles).

$$\boxed{{}^{131}_{53}I \longrightarrow {}^{131}_{54}Xe + {}^{A}_{Z}X}$$

lleis conservació: $\left\{\begin{array}{ll} A: & 131 = 131 + A \\ Z: & 53 = 54 + Z \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{{}^{A}_{Z}X = {}^{0}_{-1}X = e^- = \beta^-}$

E. PiA SABADELL

[29 - V - 14; dj]

F2

$\left\{ \boxed{E_{rel} = m_0\gamma c^2 \cong m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 = E_0 + E_c^{Newton}} \right.$

$\left(v \ll c \Rightarrow \left[1 - v^2/c^2\right]^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \right)$ APROX. a BAIXES VELOCITATS

~~NIII+14~~ XVi / XVii

EXERCICIS «LLEi de DESINTEGRACIÓ» ⊕ resum de logaritmes; reaccions nuclears.

És a dir: la reacció seria aquesta:

$$^{131}_{53}I \longrightarrow {}^{131}_{54}Xe + {}^{0}_{-1}\beta$$

, corresponent a una emissió β, i la partícula emesa, en conseqüència, seria una partícula β (o electró).

4.k/

$$^{240}_{94}Pu + {}^{a}_{b}X \longrightarrow {}^{241}_{94}Pu$$

$$^{241}_{94}Pu \longrightarrow {}^{241}_{95}Am + {}^{c}_{d}Y$$

(a) $1a: \left| \begin{matrix} 240 + a = 241 \\ 94 + b = 94 \end{matrix} \right\} \rightarrow \boxed{{}^{a}_{b}X = {}^{1}_{0}X = {}^{1}_{0}n}$ ("neutró")

$2a: \left| \begin{matrix} 241 = 241 + c \\ 94 = 95 + d \end{matrix} \right\} \rightarrow \boxed{{}^{c}_{d}Y = {}^{0}_{-1}Y = {}^{0}_{-1}e}$ ("electró", o també "partícula β")

⟹ el segon procés s'anomena "emissió β".

(b) N_0 ⟿ nuclis que n'hi havia en $t = 0$ (1944)

N ⟿ " " en queden en $t = 69$ ("ara": 2013, any d'aquest examen de SELE).

$D = N_0 - N$ ⟿ nuclis que s'han desintegrat

percentatge dels

$N = N_0 e^{-\lambda t}$

$$\Rightarrow \boxed{P} = 100 \cdot \frac{D}{N_0} = \frac{100}{N_0}(N_0 - N) = 100\left(1 - \frac{N}{N_0}\right) = 100\left(1 - e^{-\lambda t}\right) =$$

$$= 100\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}} t}\right) = 100\left(1 - \underbrace{\left(e^{\ln 2}\right)}_{2}^{-t/t_{1/2}}\right) = (*)$$

$\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$

$$\boxed{(*) = 100\left(1 - 2^{-t/t_{1/2}}\right)} =$$

$$= 100\left(1 - 2^{-\frac{69}{432}}\right) = \boxed{100(1 - 0{,}895) = 10{,}5\ \%}$$

4.2/ (a) Només hem d'escriure la llei de Fajans sent ${}^{40}_{19}K$ el nucli pare i ${}^{40}_{18}Ar$ el fill:

$$\boxed{{}^{40}_{19}K \rightarrow {}^{40}_{18}Ar + {}^{0}_{1}e}$$

COMPTE!! : aquest apartat és senzill, però té una mica de "trampa": la partícula emesa és un positró, i per tant una radiació β^+ (que apareix poc en els problemes de reaccions nuclears de SELE i 2n Bat.).

Això ho hem d'esbrinar, senzillament, fent el balanç de conservació del Z_{TOT} en l'equació de la reacció, però convé prendre nota d'aquesta eventual falta de precisió en el llenguatge dels enunciats per a que el dia de la SELE no ens pilli desprevinguts.

(b) Anem a separar el problema en dues parts:

(I) quantitat de ${}^{40}K$ en $5 \cdot 10^9$ anys

(II) edat de la roca.

En (I), $t=0$ serà l'actualitat, i per tant $m_0({}^{40}K)$ els 10 g trobats avui a la roca. En (II), $t=0$ serà el moment en què la roca es formà, i $m_0({}^{40}K)$ la quantitat que hi havia aleshores – mentre que $m({}^{40}K)$ els 10 g que tenim ara –.

(I) : $$\boxed{m = m_0 e^{-\lambda t}} = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}} t} = m_0 \underbrace{\left(e^{\ln 2}\right)}_{=2}^{-t/t_{1/2}} =$$

$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$

(justificació en [B.*] de p. iii. anvers)

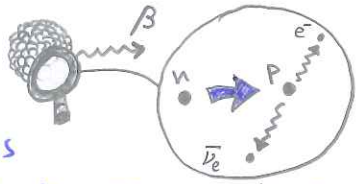
$$= 10 \cdot 2^{-\frac{5 \cdot 10^9}{1{,}25 \cdot 10^9}} = 10 \cdot 2^{-\frac{5}{1{,}25}} = 10 \cdot 2^{-4} = 10 \cdot \frac{1}{2^4} =$$

$$= \frac{10}{16} = \boxed{0{,}625 \text{ g}}$$

E. PIA SABADELL

[29 - V - 14 ; dj]

F2



EXERCICIS

«LLEI DE DESINTEGRACIÓ» ⊕ resum de logaritmes; reaccions nuclears.

~~XVII~~ XVII

(II): Si per cada nucli de $^{40}_{19}K$ que hi havia al principi se n'ha format un de $^{40}_{18}Ar$, i inicialment a la roca no hi havia $^{40}_{18}Ar$, aleshores els $10\,g\,(K) + 10\,g\,(Ar)$ actuals els corresponen a $20\,g\,(K)$ inicials: $\boxed{m_0 = 20{,}0\ g}$

(Nota: hauríem de descomptar la massa perduda amb cada emissió β^+, però les masses dels nuclis ^{40}Ar i ^{40}K són aproximadament els seus A, 40 u, i $m_{\beta^+} = m_{e^+} = m_{e^-} = m_e \simeq \frac{m_p}{2000} \simeq \frac{1}{2000}$ u, per tant estem negligint una quantitat realment petita).

Per tant,
$$\underbrace{m}_{10{,}0} = \underbrace{m_0}_{20{,}0} e^{-\lambda t} \Rightarrow e^{\lambda t} = \frac{m_0}{m} = \frac{20{,}0}{10{,}0} = 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda}_{\left(\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\right)} t = \ln 2 \Rightarrow \boxed{t = t_{1/2}} = 1{,}25 \cdot 10^9 \text{ anys}$$

Nota: evidentment, no caldria fer tot aquest càlcul, doncs la definició del període de semidesintegració és precisament aquesta: el temps en què la mostra es redueix a la meitat ($20{,}0\,g \rightarrow 10{,}0\,g$).

4.m/ $T(^{210}_{84}Po) = 138$ dies ; emissor α.

(a) Ja ens diuen que és una emissió α, per tant:

$$\boxed{^{210}_{84}Po \rightarrow {}^{206}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{T}} = \frac{\ln 2}{138} = 5{,}02 \cdot 10^{-3} \text{ dies}^{-1} =$$

$$= 5{,}02 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{dia}} \frac{1 \text{ dia}}{24 \cdot 3600\ s} = \boxed{5{,}81 \cdot 10^{-8}\ s^{-1}}$$

NOTA: als criteris de correcció de les PAU, diu que agrairia de fer una petita demostració de $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$

veure pàg. següent

T: t en què $N_0 \to N = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \Rightarrow e^{+\lambda T} = 2 \Rightarrow$

llei exponencial desint

$\Rightarrow \lambda T = \ln 2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{\ln 2}{\lambda}}$ (*) ■ (Nota: en general, en un examen convé sempre explicar allò que es fa i, si es fan servir fórmules de senzilla demostració, no està de més ofereix-la, com ara la de la velocitat d'escapament en Gravitació).

(b) $\boxed{m = m_0 e^{-\lambda t}} = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = m_0 \underbrace{(e^{\ln 2})}_{2}^{-t/T} =$

([3 *] de p. iiii. anvers) [*]

$= m_0 2^{-t/T} = 5 \cdot 2^{-20/138} = 5 \cdot 0{,}904 = \boxed{4{,}52 \text{ mg}}$ ■

4.n $^{14}_{6}C$ emissor β^- : $T = 5{,}73 \cdot 10^3$ anys.

$\boxed{A = 15{,}0 \cdot 10^3 \text{ desint/dia} = 15 \cdot 10^3 \frac{\text{desint}}{1 \text{ dia}} \frac{1 \text{ dia}}{24 \cdot 3600 \text{ s}} = 0{,}174 \text{ Bq}}$ (*)

activitat del nostre os ara.

$\boxed{A_0 = 22{,}1 \cdot 10^3 \frac{\text{desint}}{\text{dia}} \cdot \frac{1 \text{ dia}}{24 \cdot 3600 \text{ s}} = 0{,}256 \text{ Bq}}$ (*,*)

activitat actual d'un os amb la mateixa massa que el nostre: és igual a l'A del nostre en el t en què l'animal estava encara viu ($t = 0$) $\Rightarrow$ és igual a A_0.

(a) $\boxed{^{14}_{6}C \to {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e}$ ■ la partícula β^- és un electró.

(Z_{TOT} i A_{TOT} es conserven sempre)

(b) $A = \lambda N = \underbrace{\lambda N_0}_{A_0} e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow e^{\lambda t} = \frac{A_0}{A} = \frac{0{,}256}{0{,}174} \Rightarrow$ [*,*] i [*]

$\Rightarrow \underbrace{\lambda}_{\frac{\ln 2}{T}} t = \ln \frac{0{,}256}{0{,}174} \Rightarrow \boxed{t = T \cdot \frac{\ln(0{,}256/0{,}174)}{\ln 2}} = T \cdot 0{,}557 = \boxed{3\,190 \text{ anys}}$ ■