12 - febrero - 2015 (NOTA: ver RESUMEN de FÓRMULAS en la última página.) 2015/02/12 $\frac{i}{iU}$

EJERCICIOS de senos y cosenos

RESOLUCIONES: detrás de los enunciados !

- Refuerzo para FÍSICA de nivel 2º de Bachillerato
- Pueden hacerse con el apoyo del "Reloj de Senos y Cosenos" (versión para imprimir y versión para usar online: http://manifoldo.weebly.com ⇒ sección "Promoción Interna").

(nota: una ayuda puede ser examinar casos concretos con la calculadora, por ejemplo $\alpha = 60^\circ$, etc.)

A Conceptuales:

A.1 ¿Qué relación existe entre el seno de α y el de $\pi - \alpha$? ¿Y entre sus cosenos?

A.2 ¿Qué relación existe entre $\cos\alpha$ y $\cos(-\alpha)$? ¿Y entre $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{sen}(-\alpha)$?

A.3 ¿Cuánto es una vuelta completa expresada en grados? ¿Y en radianes? ¿Qué relación existe entre $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi)$, $\cos(\alpha + \pi)$?

A.4 Sea $\alpha = 0{,}2$ rad. ¿Cuánto vale β, si es el ángulo resultante de ir abriendo α hasta dar una vuelta completa? ¿Cuánto vale γ, que resulta de partir de α y dar dos vueltas completas? ¿Qué relación hay entre los senos de α, β y γ? ¿Y entre los cosenos?

A.5 Sea α un ángulo. ¿Cuánto vale β, si resulta de partir de α y dar n vueltas completas? (siendo n un número natural). ¿Qué relación hay entre $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{sen}\beta$? ¿Y entre $\cos\alpha$ y $\cos\beta$?

A.6 ¿Qué relación existe entre $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$?

B Aplicados:

B1 sabemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ\right)$.

Sin usar la calculadora, encuentra el valor de:

$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $\cos\frac{\pi}{4}$,

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{4}\right)$.

B2 sabemos que $\cos(60^\circ) = 0{,}5$. Sin usar la calculadora, encuentra el valor de

$\cos(300^\circ)$, $\cos(120^\circ)$, $\cos(240^\circ)$.

B3 sabemos que $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025$

Di un ángulo que tenga el mismo valor para el coseno. ¿Es el único posible? Súmale 360° a 30° y calcula su coseno. ¿Cómo explicas el resultado? ¿Cuánto dará si le sumas $2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$? ¿Y si le sumas $n \cdot 360^\circ$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ (es decir $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$)?

B4 Si $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}6$, ¿cuánto vale α?

A partir de lo que te dice la calculadora, encuentra otro resultado posible.

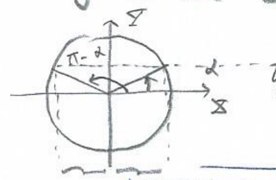
B5 $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}3$, ¿cuánto vale α?

Encuentra 2 resultados en "la primera vuelta", y luego encuentra más resultados sumando o restando vueltas enteras.

B6 $\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}\alpha = 0{,}2 \\ \cos\beta = 0{,}9\end{array}\right\}$ encuentra todos los valores posibles de α y β.

RESOLUCIONES:

A1.- En la circunferencia de radio = 1 ("goniométrica"), el seno de un ángulo es la proyección sobre el eje Y. Por lo tanto, el seno de un ángulo α y de su suplementario, $\pi - \alpha$ ($180^\circ - \alpha(^\circ)$), coinciden:

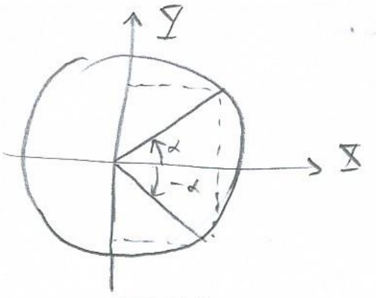


$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha)}$ (I)

En cuanto al coseno, $\boxed{\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)}$ (II)

es la proyección sobre el eje X, y por lo tanto el coseno de $(\pi - \alpha)$ es el mismo que el de α con el signo cambiado.

A2.-



sen α

$\boxed{\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha}$ (1) ⇒ también se dice que el seno es una función "impar", o antisimétrica respecto ordenadas.

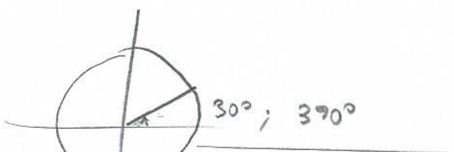
$\boxed{\cos\alpha = \cos(-\alpha)}$ (2) ⇒

También se dice que el coseno es una función "par", o simétrica respecto ordenadas.

A3.- 1 vuelta completa ⟷ 360° ⟷ 2π rad

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi)$
$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi)$

Un ángulo α y otro ángulo $\alpha + 2\pi$ representan exactamente la misma posición sobre la circunferencia goniométrica, por tanto tienen los mismos valores para el seno (y el coseno):



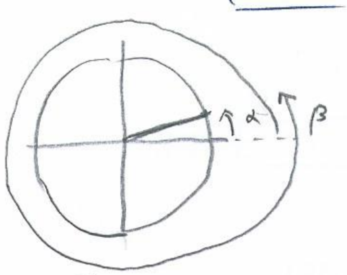
$\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{sen} 390^\circ$
$\cos 30^\circ = \cos 390^\circ$

Estos ángulos mayores que 360° se pueden utilizar para expresar procesos. Por ejemplo, si decimos que un disco ha girado 390°, significa que ha dado una vuelta completa y 30° grados más.

A4.- 1 vuelta → 2π rad
2 vueltas → $2 \cdot 2\pi = 4\pi$ rad $\Big\} \Rightarrow$ $\boxed{\beta = \alpha + 2\pi = 6{,}483 \text{ rad}}$
$\boxed{\gamma = \alpha + 4\pi = 12{,}766 \text{ rad}}$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\underbrace{\alpha + 2\pi}_{\beta}) = \operatorname{sen}(\underbrace{\alpha + 2\cdot 2\pi}_{\gamma})}$$

, pues si añadimos vueltas completas la posición sobre la circunf. goniométrica no cambia y por lo tanto tampoco el valor del seno (ni del cos.).

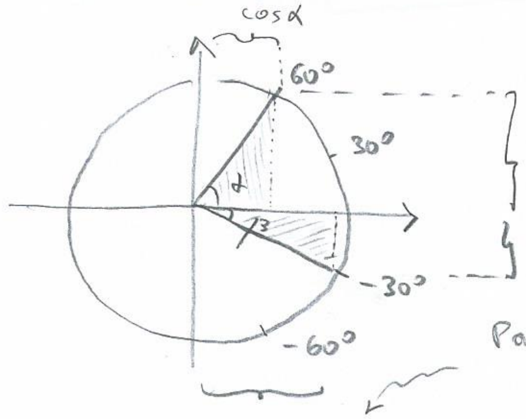


$$\boxed{\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma}$$

Con la calculadora, $\operatorname{sen} 0{,}2 = 0{,}199$; $\cos 0{,}2 = 0{,}980$.

A5.- $\boxed{\beta = \alpha + n\,2\pi}_{(3)}$ $(n \in \mathbb{N})$. $\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta}$ (3.a) ; $\boxed{\cos\alpha = \cos\beta}$ (3.b)

A6.- Podemos visualizar fácilmente la relación eligiendo un ángulo de, por ejemplo, 60° y representándolo en la circunferencia goniométrica:



$$\boxed{\beta = \alpha - \frac{\pi}{2} = 60° - 90° = -30°}$$

sen α

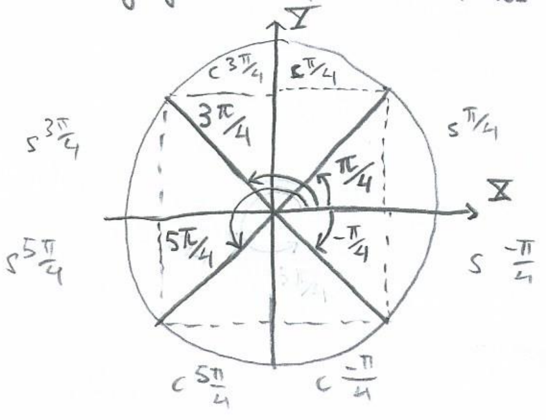
$$\operatorname{sen}\beta = -\cos\alpha = -0{,}5$$

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para ver el por qué de estas igualdades, tan sólo hay que ver que los dos triángulos rayados son iguales.

En general, siempre se cumple que $\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$ (4)

B1.- Representamos en la circunferencia goniométrica estos ángulos y fácilmente deducimos los siguientes resultados:



$-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$ (también: $-45° = 45° - 90°$), y por lo tanto $\boxed{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ (USAMOS ec. (4)).

El resto de valores:

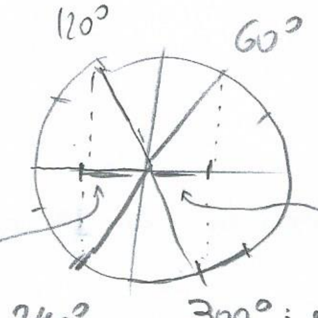
$\operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

EJERCICIOS de SENOS y COSENOS

B2.-



$120° = 180° - 60°$ (suplementario)

$\Rightarrow$ $\boxed{\cos 120° = -\cos 60° = -0,5}$

(de acuerdo con ec. [II]).

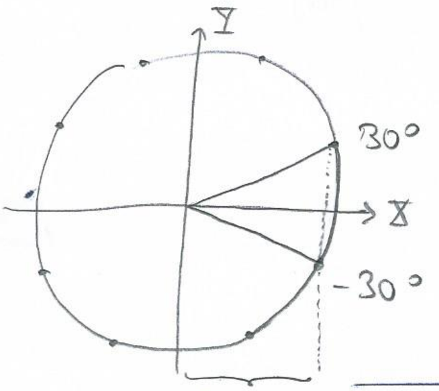
$\boxed{\cos 60° = \cos 300° = 0,5}$ (de acuerdo con ec. [2]).

300°: equivale a $-60°$

240°: equivale a $-120°$

$\boxed{\cos 240° = \cos 120° = -0,5}$ ← (de acuerdo con ec. [2]).

B3.-



i) $\boxed{-30°}$ tiene el mismo coseno que $\boxed{30°}$, pues en la circunferencia goniométrica tienen la misma proyección sobre el eje X.

$\boxed{\cos 30° = \cos(-30°)}$ ← (de acuerdo con ec. [2]).

ii) No es el único posible. Si damos una vuelta completa, $30° \rightarrow 30° + 360° = 390°$

... la proyección sobre eje X sigue siendo la misma, y por lo tanto $\boxed{\cos 390° = \cos 30° = 0,866025}$, como se puede comprobar con la calculadora.

iii) $30° + 2 \cdot 360° = 30° + 720° = 750°$, $\boxed{\cos 750° = \cos 30° = 0,866025}$

pues consiste en dar dos vueltas completas a partir de 30°.
Análogamente, $30° + n \cdot 360°$ $(n \in \mathbb{N})$ consiste en dar n vueltas completas, y por tanto

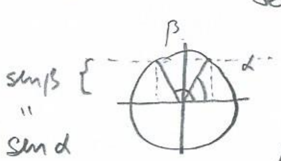
$$\boxed{\cos(30° + n \cdot 360°) = \cos 30° = 0,866025} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(de acuerdo con ec. [3.6]).

B4.-

$\text{sen}\, \alpha = 0,6 \Rightarrow \boxed{\alpha = \text{sen}^{-1}(0,6) = 0,6435 \text{ rad}}$ (de acuerdo con ec. (I))

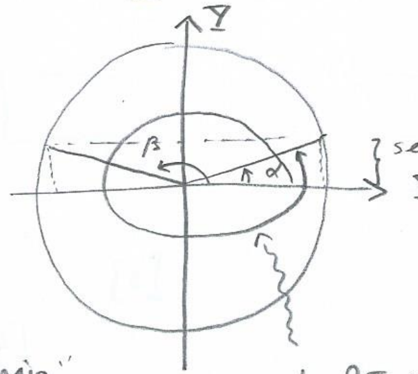
calculadora



$\beta = \pi - \alpha$ "suplementario" $\Rightarrow \boxed{\beta = 3,1416 - 0,6435 = 2,4981 \text{ rad}}$

calculadora ↙ 1er resultado de "la 1ª vuelta".

B5.- $\boxed{\alpha = \text{sen}^{-1}\, 0{,}3 = 0{,}3047 \text{ rad.}}$ ⟹ buscamos el suplementario,



sen β

↑

el seno del "suplementario" ($\pi - \alpha$, ó $180° - \alpha(°)$ [el reflejo "en el espejo"]) es el mismo que el de α, de acuerdo con ec. [I].

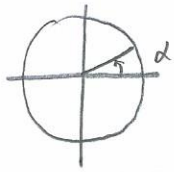
$\boxed{\beta = \pi - \alpha = 3{,}1416 - 0{,}3047 = 2{,}8369 \text{ rad}}$

2º resultado de "la 1ª vuelta".

↳ sumando o restando vueltas enteras a partir de estos dos ángulos encontramos otros ángulos con el mismo valor para el seno.

$\alpha + 2\pi$: α y otra vuelta entera : no cambia el seno (pues no cambia la proyección sobre eje Y), de acuerdo con ec. [3a].

→ el suplementario β pertenece a "la primera vuelta".



$\alpha = 0{,}3047$: ángulo en la 1ª vuelta. ⟹

sumamos ... 1 vuelta más: $\alpha_1 = \alpha + 2\pi = 6{,}5879$	2 vueltas más: $\alpha_2 = \alpha + 2\cdot 2\pi = 12{,}8711$	...	n vueltas: $\boxed{\alpha_n = \alpha + n\cdot 2\pi}$
restamos ... 1 vuelta: $\alpha_{-1} = \alpha - 2\pi = -5{,}9785$	2 vueltas: $\alpha_{-2} = \alpha - 2\cdot 2\pi = -12{,}2617$	...	n vueltas: $\boxed{\alpha_{-n} = \alpha - n\cdot 2\pi}$

Fíjate en que podemos expresar todos estos resultados así: $\boxed{\alpha_m = \alpha + m\cdot 2\pi}$ siendo $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

→ Para el suplementario $\beta = 2{,}8369$, hacemos lo mismo: $\boxed{\beta_m = \beta + m\cdot 2\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots)}$

(es decir: "para cualquier m entero", lo cual en simbología matemática se suele expresar así: $\forall m \in \mathbb{Z}$).

B6.- Seguimos un procedimiento análogo al seguido en [B5], pero ahora recordando que para el coseno no se busca el "suplementario" sino el "opuesto", $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (el "reflejo en el estanque", ver ec. [2]).

ESTRATEGIA: (1) hallamos un valor en la 1ª vuelta con $\boxed{\cos^{-1}}$ de la calculadora (o sen^{-1}).

(2) hallamos el otro valor de la 1ª vuelta: $\begin{cases} \alpha \to -\alpha & \text{"estanque" (para el coseno).} \\ \alpha \to \pi - \alpha & \text{"espejo" o suplementario (para el seno).} \end{cases}$

(3) a partir de estos dos ángulos, hallamos otros sumando m vueltas: $+2\pi m$.

Resolvemos el ejercicio aplicando la anterior estrategia:

a/ $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}2 \rightarrow$

① : CALCULADORA

$\boxed{\alpha} = \operatorname{sen}^{-1}(0{,}2) = \boxed{0{,}2014 \text{ rad}}$

② : SUPLEMENTARIO (o "espejo")

$\pi - \alpha = \boxed{2{,}9402 \text{ rad.}}$

③ : m VUELTAS

$$\boxed{\begin{Bmatrix} 0{,}2014 + 2\pi m \\ 2{,}9402 + 2\pi m \end{Bmatrix} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)}$$

este es el resultado final de todos los valores de un ángulo para que su seno sea 0,2.

COMENTARIOS: i/ se puede expresar, de manera más compacta, así:

$$\boxed{\alpha = \begin{Bmatrix} 0{,}2014 + 2\pi m \\ 2{,}9402 + 2\pi m \end{Bmatrix} \quad \forall m \in \mathbb{Z}}$$

ii/ si hacemos $m = 0$, encontramos los dos de la 1ª vuelta.
si hacemos m's negativos, estamos dando vueltas hacia atrás.

b/ $\cos\beta = 0{,}9 \rightarrow$

① : CALCULADORA

$\beta = \cos^{-1} 0{,}9 = 0{,}4510$ rad

② : OPUESTO ("estanque")

$-\beta = -0{,}4510$

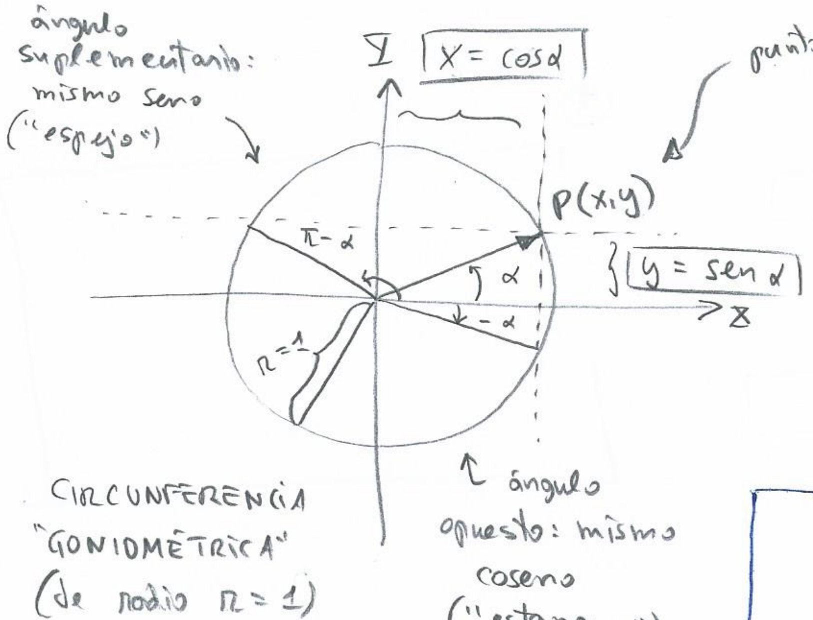
③ m VUELTAS

$$\boxed{\begin{Bmatrix} 0{,}4510 + 2\pi m \\ -0{,}4510 + 2\pi m \end{Bmatrix} \quad (\forall m \in \mathbb{Z})}$$

COMENTARIO: en el caso del coseno, el resultado se puede expresar de manera más compacta así:

$$\boxed{\beta = \pm 0{,}4510 + 2\pi m \quad \forall m \in \mathbb{Z}}$$

RESUMEN de FÓRMULAS (y algunos conceptos / procedimientos):



punto de coordenadas (x, y). La x vale lo mismo que $\cos\alpha$, la y vale lo mismo que $\operatorname{sen}\alpha$.

Es decir:

- coseno ... proyección sobre eje X
- seno ... proyección sobre eje Y

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(\pi-\alpha) &= \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \end{aligned}}$$

suplementario ("espejo")

opuesto ("estanque")

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$$

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi n) &= \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\alpha + 2\pi n) &= \cos\alpha \end{aligned}\right\}}$$

(n vueltas) $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (ó: $n \in \mathbb{Z}$)

NOTA: también se puede razonar fácilmente que si damos sólo media vuelta, tanto el seno como el coseno cambian de signo:

$\alpha \to \alpha + \pi$ "media vuelta":
$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\pi) &= -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\alpha+\pi) &= -\cos\alpha \end{aligned}\right.$$

- **PROCEDIMIENTO** para HALLAR TODOS los valores de
  - α si sabemos el seno, $\operatorname{sen}\alpha = A$
  - β si sabemos el coseno, $\cos\beta = B$

  :

(1) CALCULADORA: $\boxed{\operatorname{sen}^{-1} A}$ (ó: $\cos^{-1} B$)

$\Rightarrow$ (2) OTRO VALOR de la 1ª VUELTA:

$\alpha \to \pi - \alpha$ $\boxed{\text{SUPLEMENTARIO}}$ ("espejo")

(ó: $\beta \to -\beta$ $\boxed{\text{OPUESTO}}$ ("estanque"))

$\Rightarrow$ (3) m VUELTAS:

sumamos $\boxed{+2\pi m}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$) a los dos valores hallados

$\boxed{{}^{\circ} \text{ y rad}}$: $360^{\circ} \Leftrightarrow 2\pi$ rad $\Leftrightarrow$ 1 vuelta $\boxed{\alpha(\text{rad}) = \frac{2\pi \text{ rad}}{360^{\circ}} \alpha(^{\circ})} \Leftrightarrow \boxed{\alpha(^{\circ}) = \frac{360}{2\pi} \alpha(\text{rad})}$