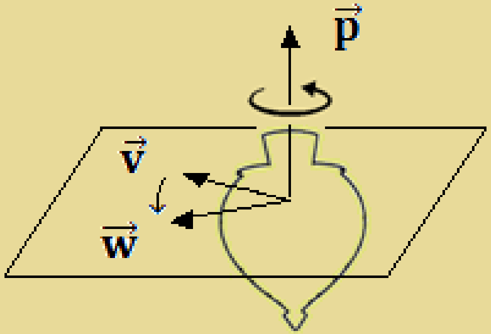
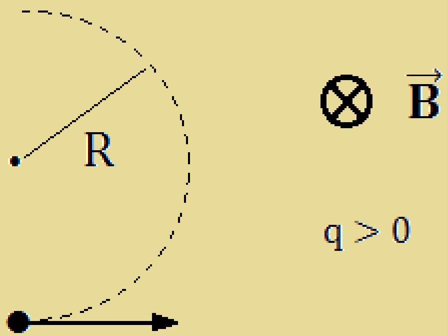


Escola Pia de Sabadell
Física de 2n de Batxillerat
(curs 2013-14)

EL CAMP $\vec{B}$

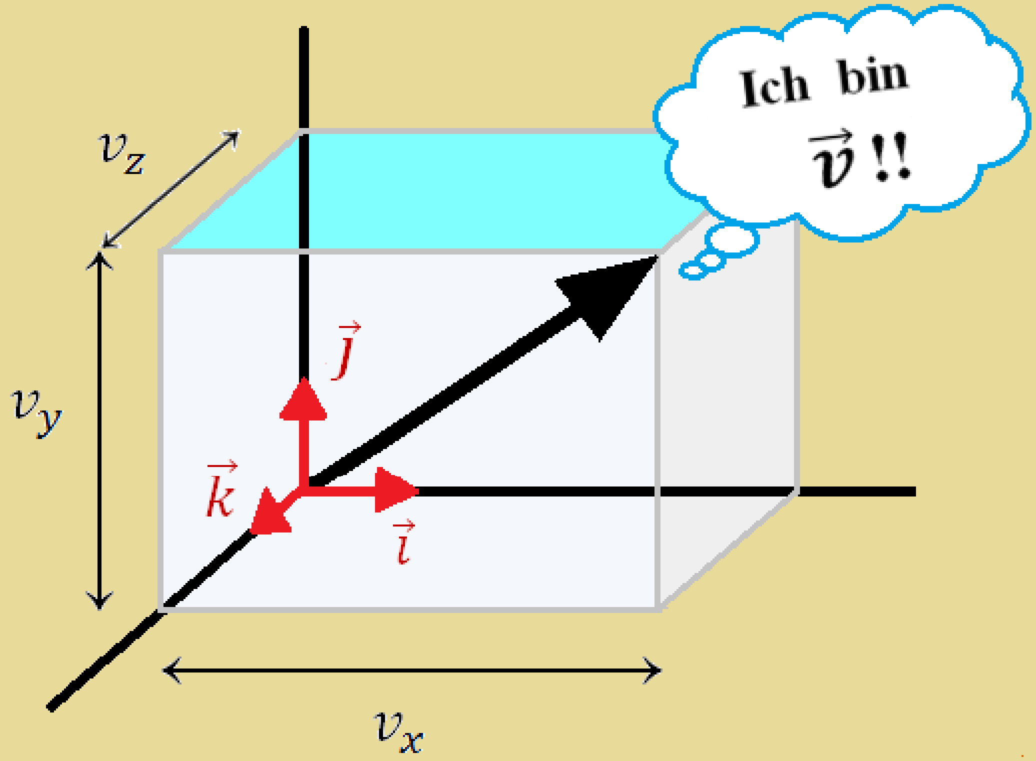
i la regla de la mà dreta

Pepe Ródenas Borja



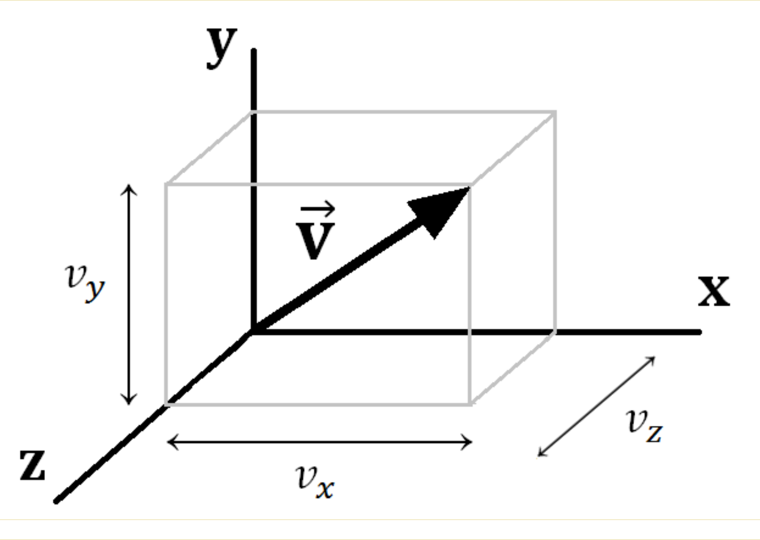
1. Vectors en 3D
2. Com pot girar una baldufa
3. Producte vectorial i mà dreta
4. Interpretació geomètrica
5. Camp $\vec{B}$: fonts i efectes

1 Vectors en 3D



1.a) Els vectors com a “fletxes”

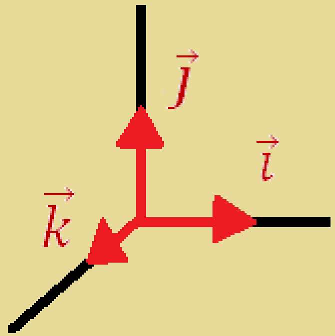
Un vector de components (v_x, v_y, v_z) és un segment orientat en l’espai. Si imaginem una “caixa de sabates” (un *ortoedre*) de costats v_x, v_y, v_z, el nostre vector unirà dos vèrtexs seguint la diagonal major:



1.b) La base canònica

Els vectors $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ formen la “base canònica”, B.

$$\begin{cases} \vec{\imath} = (1,0,0) \\ \vec{\jmath} = (0,1,0) \\ \vec{k} = (0,0,1) \end{cases}$$



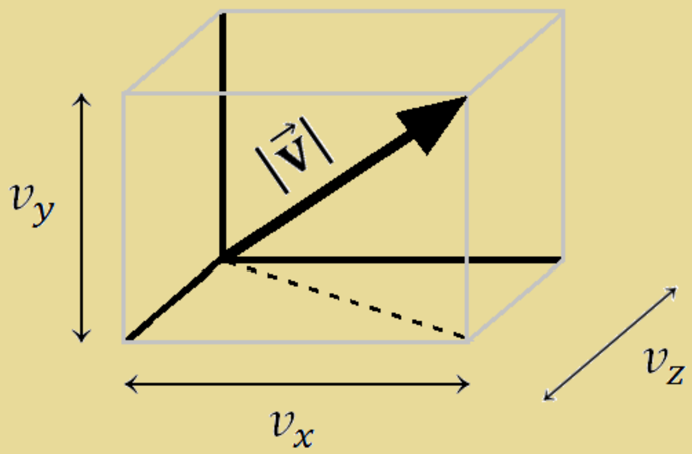
Qualsevol vector de components (v_x, v_y, v_z) es pot expressar de manera senzilla en termes dels $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$; només cal escriure: $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$.

La base B és *ortonormal*: tots els seus elements són perpendiculars entre sí, i tenen mòdul unitat.

1.c) El mòdul d'un vector

El mòdul d'un vector és un nombre real positiu o nul que ens diu la longitud de la corresponent “fletxa”.

Es calcula trobant la llargada de la diagonal de l'ortoedre (usant el teorema de Pitàgores 2 vegades):



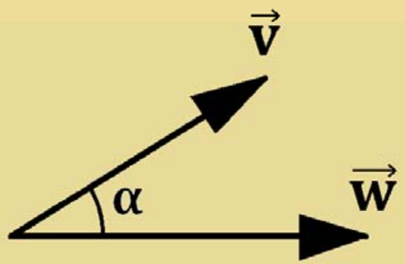
$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

1.d) El producte escalar

El producte escalar de dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ és el número real positiu (o nul) que resulta de fer la següent operació:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

El producte escalar també es pot calcular a partir dels mòduls de $\vec{v}$ i $\vec{w}$ i l'angle α que formen entre sí:

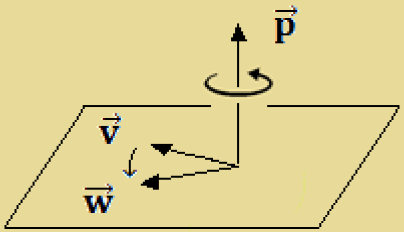


$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos \alpha$$

1.e) El producte vectorial

El producte vectorial de dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ és un altre vector $\vec{p}$ que expressem així:

$$\vec{p} = \vec{v} \times \vec{w}$$



i té les següents característiques:

i) <u>direcció</u>: perpendicular al pla que conté $\vec{v}$ i $\vec{w}$;

ii) <u>sentit</u>: el de la regla de la mà dreta abatent el primer vector sobre el segon pel camí més curt;

iii) <u>mòdul</u>: si α és l'angle que formen entre sí $\vec{v}$ i $\vec{w}$,

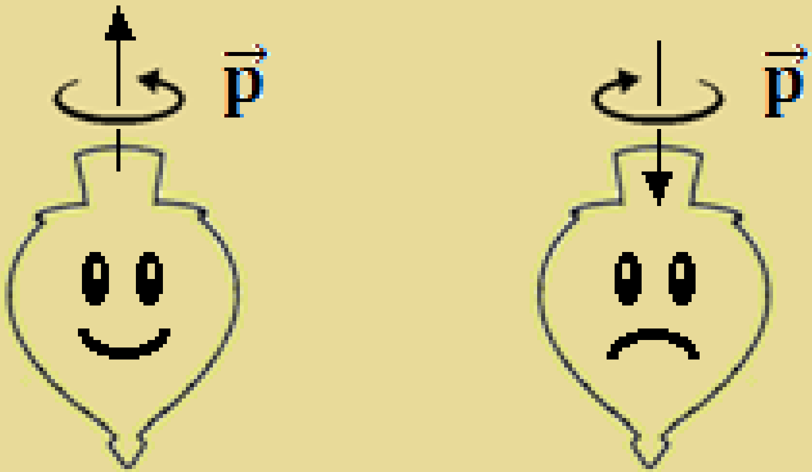
$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}| \sin \alpha .$$

També podem calcular el producte vectorial de dos vectors a partir de les seves respectives components:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} =$$

$$= (v_y w_z - v_z w_y)\vec{i} + (v_z w_x - v_x w_z)\vec{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\vec{k}$$

2 Com pot girar una baldufa



La regla de la mà dreta no és només una manera de definir el sentit del producte vectorial de dos vectors.

És molt important també, per exemple, per a recordar com són les línies del camp magnètic que crea un element de corrent elèctric.

Per a entendre clarament com s’utilitza aquesta regla, anem a relacionar-la amb la rotació d’una baldufa.

Anem a fixar-nos, doncs, en com seria la trajectòria que descriuria un punt vermell que, per exemple, pintéssim amb retolador a la “panxa” de la baldufa.

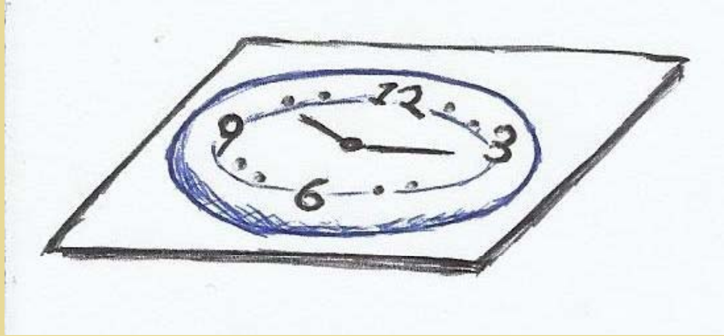
És evident que la seva trajectòria seria una circumferència. Però aquesta circumferència pot ser recorreguda en dos sentits.

Imaginarem ara un rellotge sobre el terra, al costat de la nostra baldufa que gira. Comparem el moviment del punt vermell amb el de les busques d’aquest rellotge.

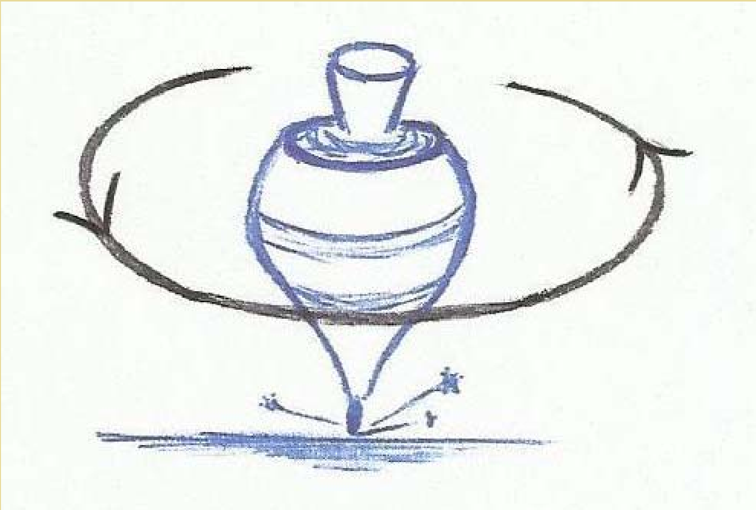
1a possibilitat:

1a possibilitat:

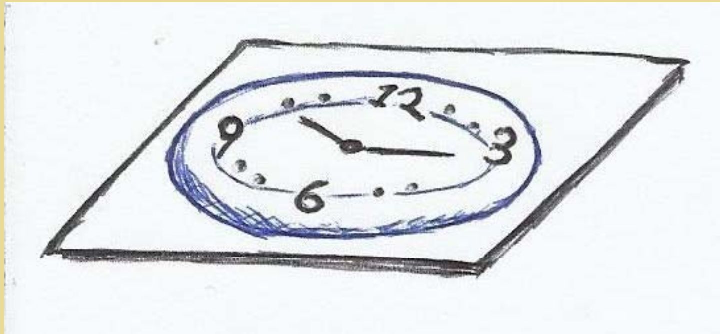
El punt i la baldufa giren al contrari que les busques.



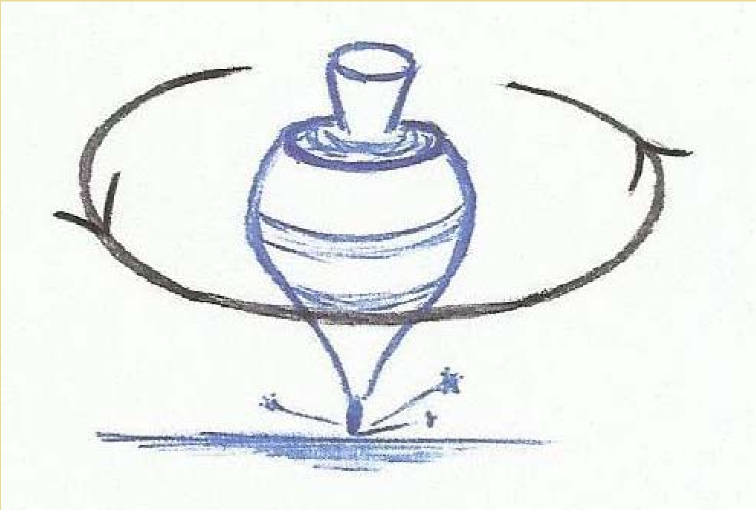
1a possibilitat:



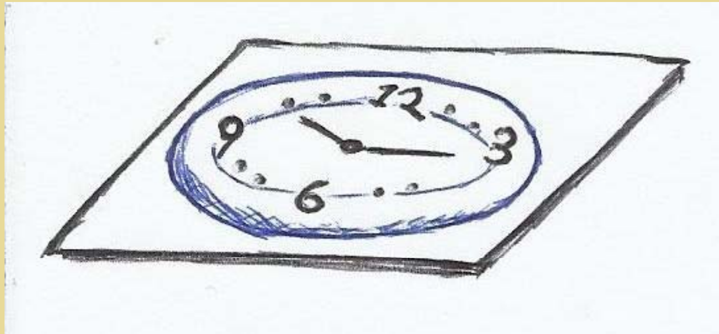
El punt i la baldufa giren al contrari que les busques.



1a possibilitat:



El punt i la baldufa giren al contrari que les busques.

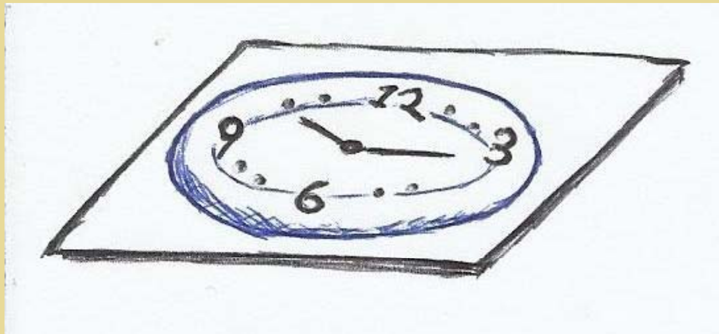


En direm “**sentit antihorari**”.

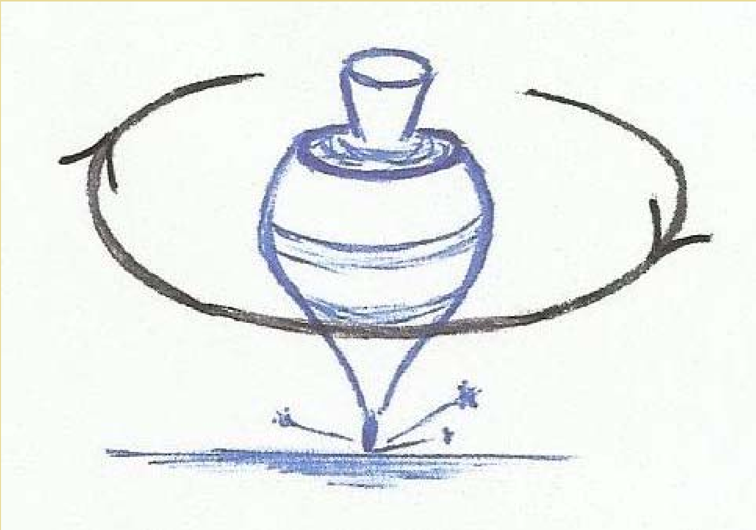
2a possibilitat:

2a possibilitat:

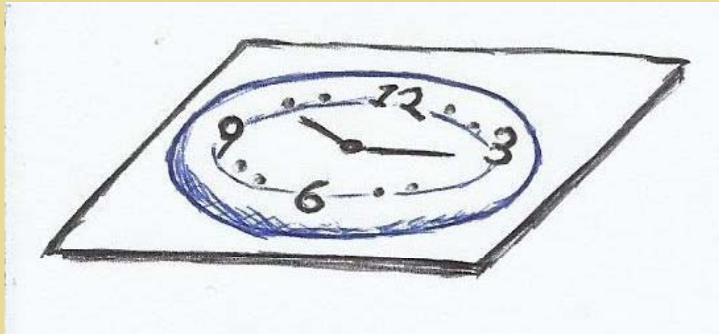
El punt i la baldufa giren en el mateix sentit que les busques.



2a possibilitat:

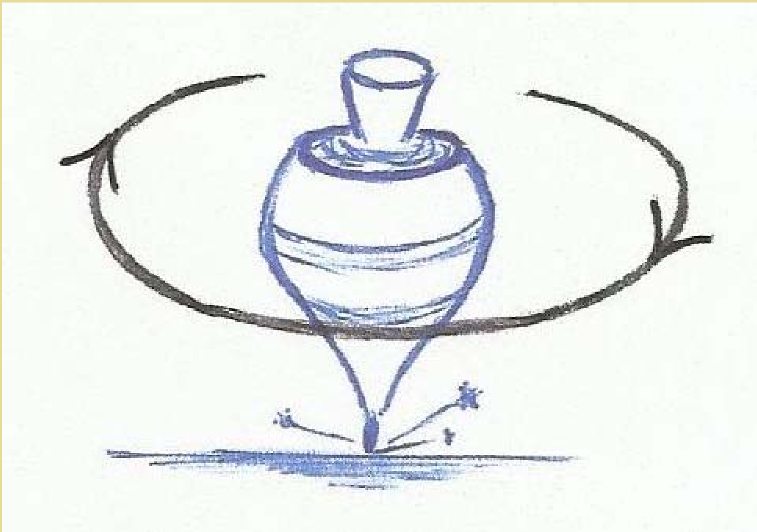


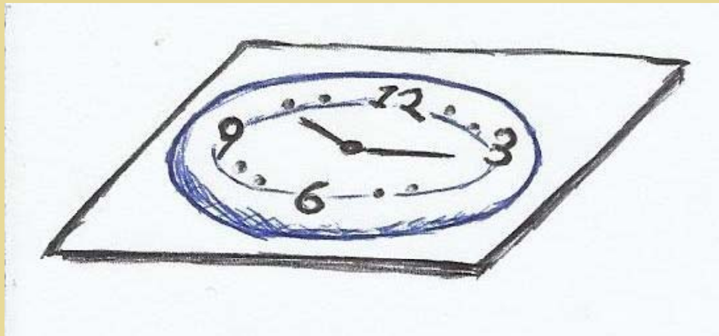
El punt i la baldufa giren en el mateix sentit que les busques.



2a possibilitat:

El punt i la baldufa giren en el mateix sentit que les busques.





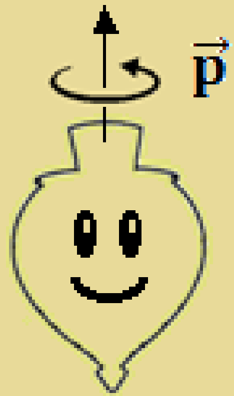
En direm “**sentit horari**”.

Finalment, associarem un vector a cadascun d’aquests possibles sentits de gir de la baldufa.

En el primer cas (gir “antihorari”), definirem aquest vector com aquell que està orientat cap amunt seguint l’eix de gir de la baldufa. (El seu mòdul, de moment, serà irrellevant).

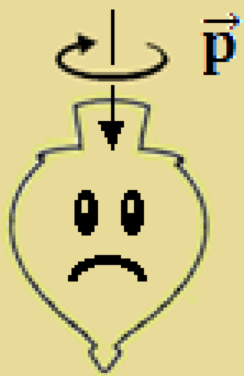
Finalment, associarem un vector a cadascun d’aquests possibles sentits de gir de la baldufa.

En el primer cas (gir “antihorari”), definirem aquest vector com aquell que està orientat cap amunt seguint l’eix de gir de la baldufa. (El seu mòdul, de moment, serà irrellevant).



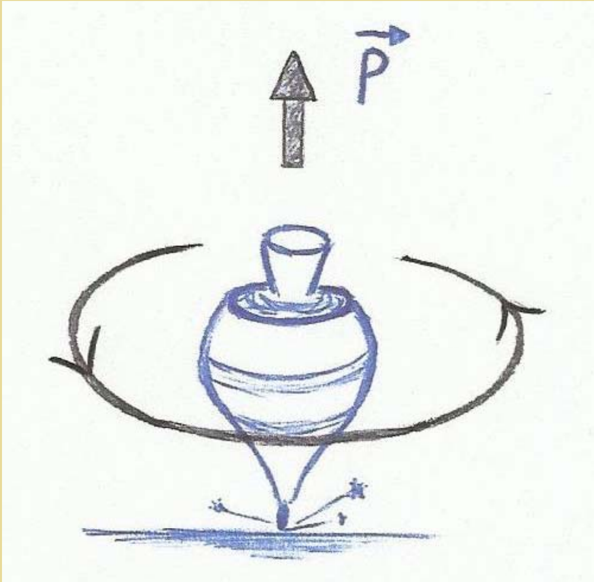
Pel que fa a la segona possibilitat (gir en sentit “horari”), li associarem un vector orientat cap avall seguint l’eix de gir de la baldufa.

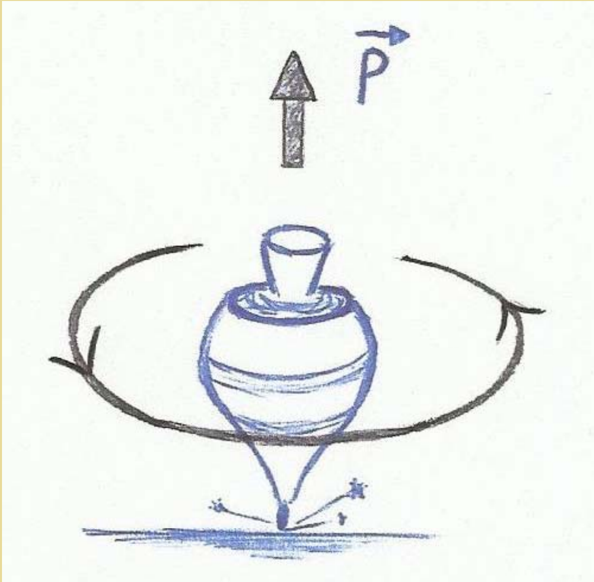
Pel que fa a la segona possibilitat (gir en sentit “horari”), li associarem un vector orientat cap avall seguint l’eix de gir de la baldufa.

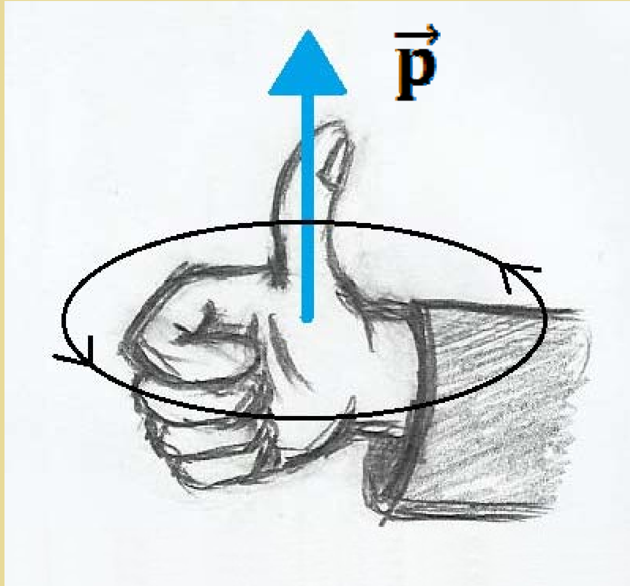


Una manera de recordar aquest conveni és la regla de la mà dreta.

Adonem-nos-en: si fiquem el polze de la nostra mà dreta mirant cap amunt, és a dir, com el vector associat al gir anti-horari, i tanquem la resta de dits, aquests indicaran, precisament, el sentit de gir del nostre punt vermell (o “melic”) de la panxa de la baldufa:

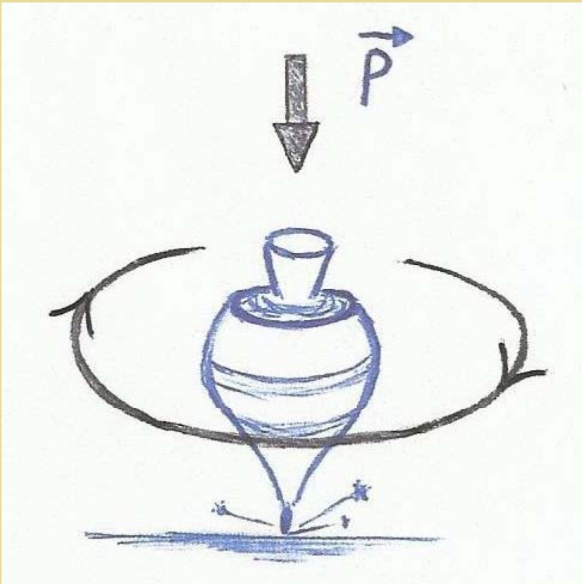

$\vec{P}$


$\vec{P}$

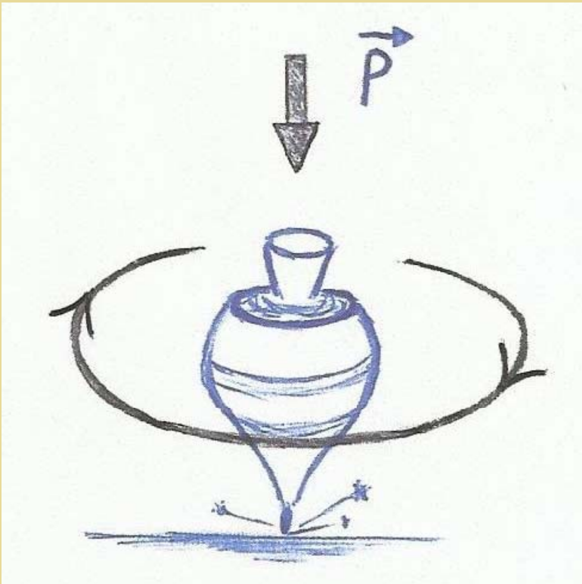

$\vec{\mathbf{p}}$

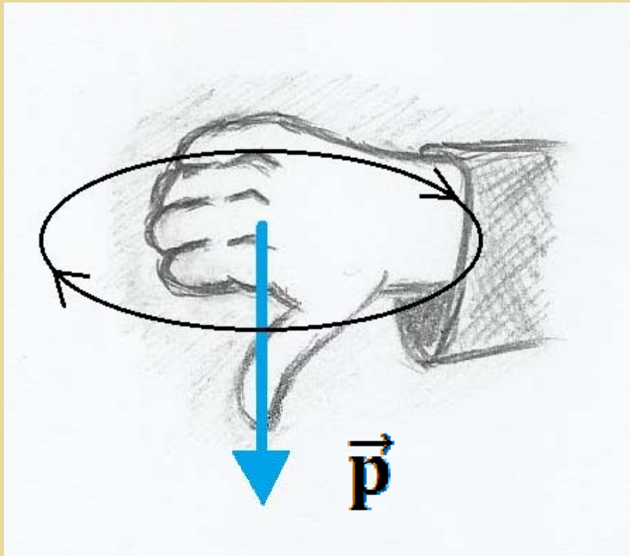
Si fiquem ara el polze de la nostra mà dreta mirant cap avall, és a dir, com el vector associat al gir en sentit horari, i tanquem la resta de dits igual que hem fet abans, aquests tornaran a indicar el sentit de gir del melic de la baldufa:

Si fiquem ara el polze de la nostra mà dreta mirant cap avall, és a dir, com el vector associat al gir en sentit horari, i tanquem la resta de dits igual que hem fet abans, aquests tornaran a indicar el sentit de gir del melic de la baldufa:



Si fiquem ara el polze de la nostra mà dreta mirant cap avall, és a dir, com el vector associat al gir en sentit horari, i tanquem la resta de dits igual que hem fet abans, aquests tornaran a indicar el sentit de gir del melic de la baldufa:

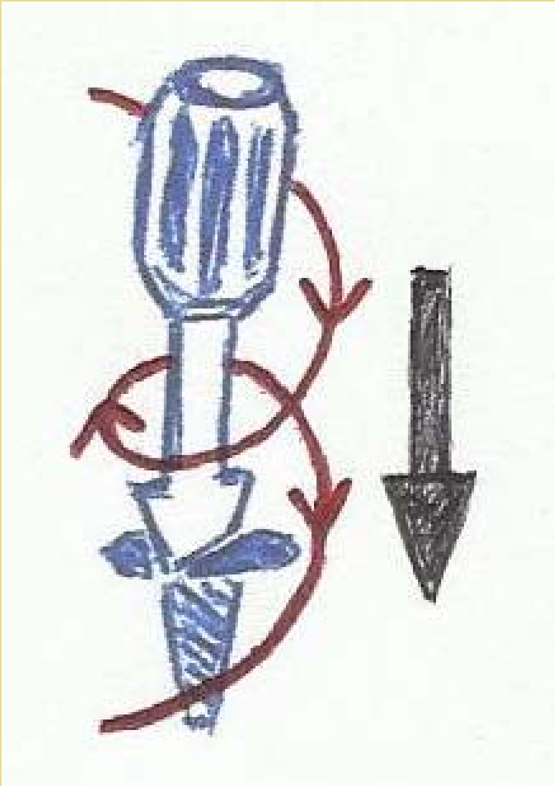


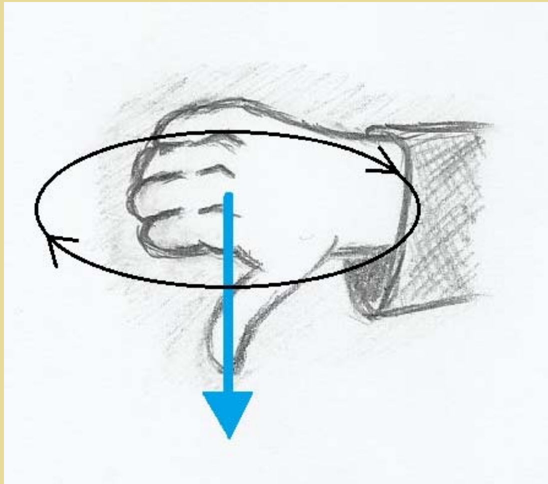


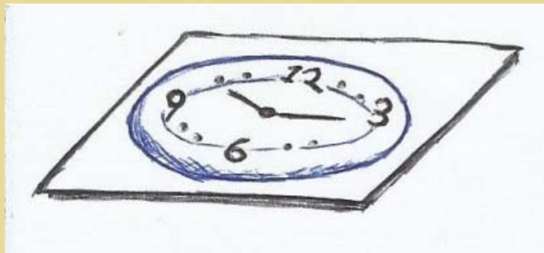
Així, podem recordar facilment quan el vector associat a un sentit de rotació va cap amunt o cap avall: només hem de ficar els dits de la nostra mà dreta indicant tal sentit de rotació, i el polze apuntarà en el mateix sentit que el vector que busquem. Aquesta mnemotècnia és el que hom coneix com “la regla de la mà dreta”.

Alguns autors la coneixen, alternativament, com la “regla del tornavís”.

Això es deu a que si fem girar un tornavís en sentit horari, el caragol baixarà (o “entrarà”), d’acord amb el vector associat a aquest sentit de gir:



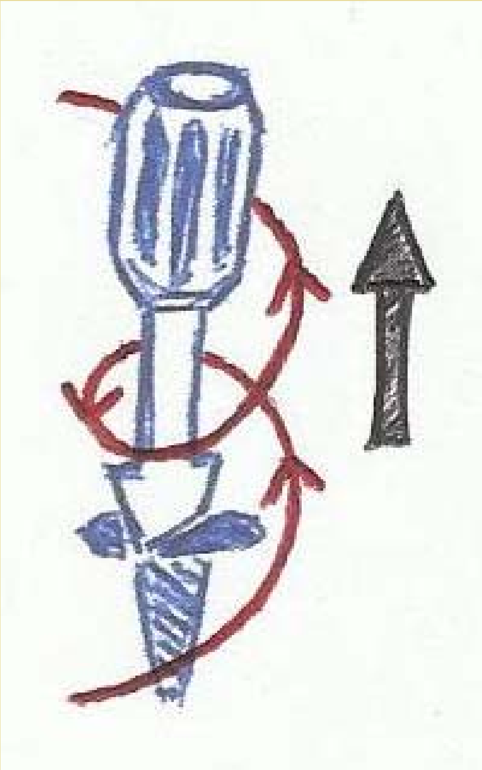


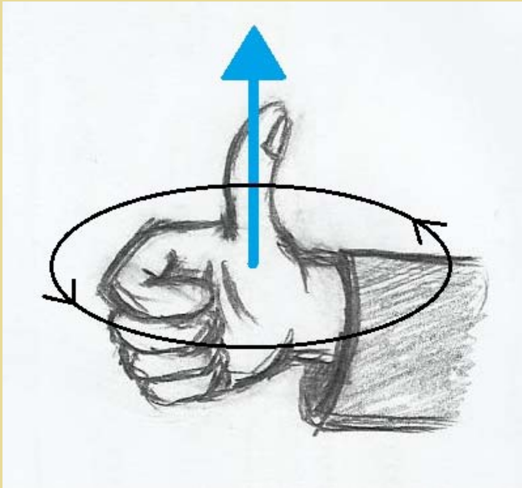


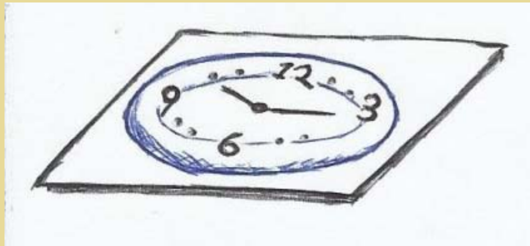
“Entra”

Horari

Contrariament, si fem girar el tornavís en sentit antihorari, el caragol pujarà (o “sortirà”):



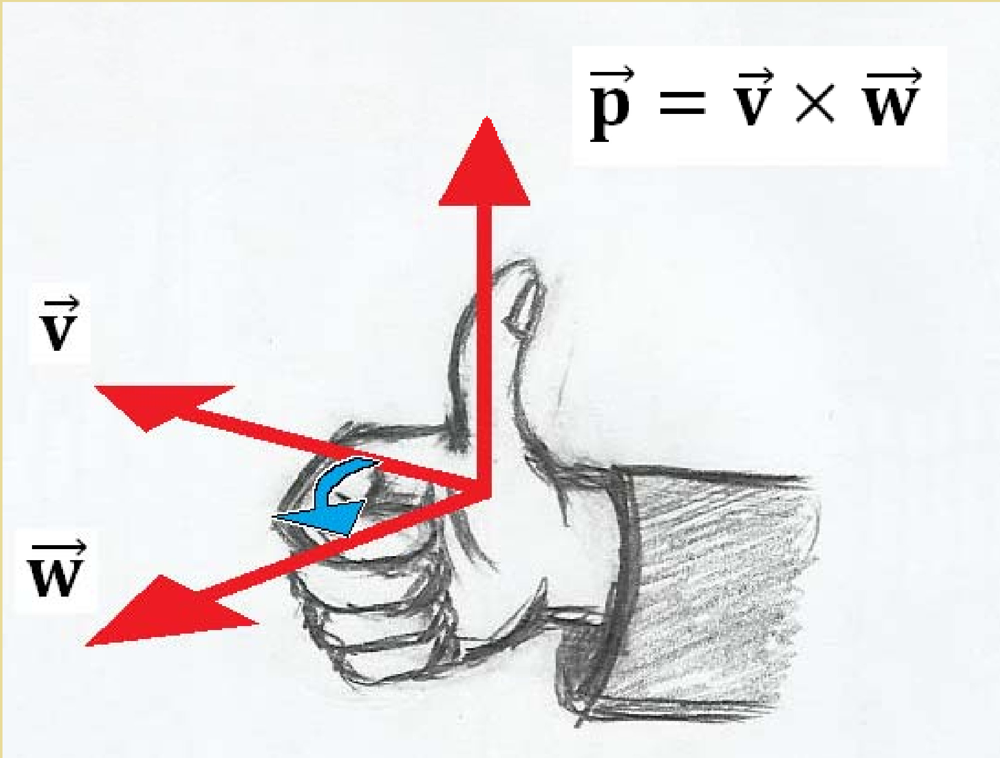




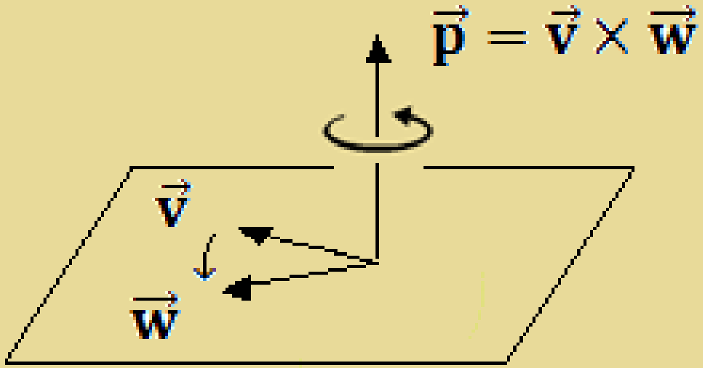
“Surt”

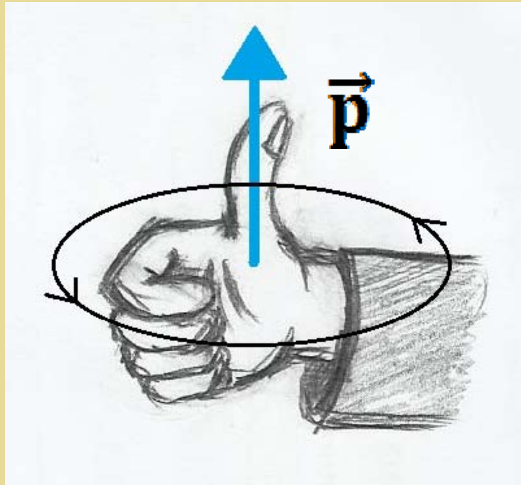
Antihorari

3 Producte vectorial i mà dreta



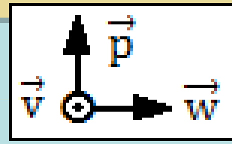
Apliquem la regla de la mà dreta per a saber quin sentit tindrà el resultat del producte vectorial de dos vectors:

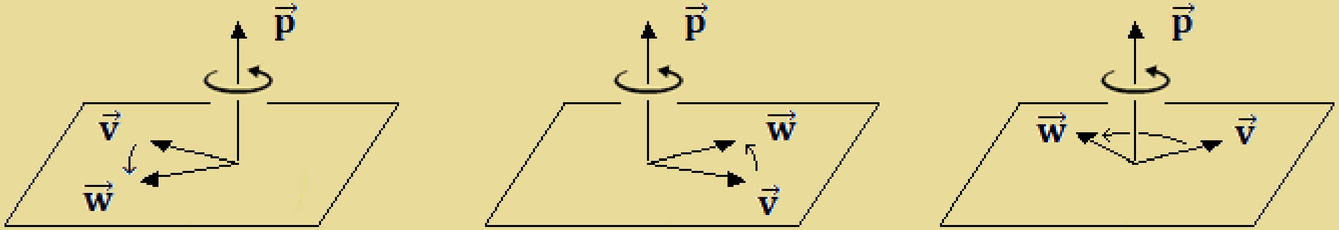


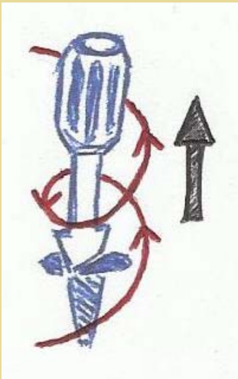


Quan abatem el primer vector sobre el segon, definim un sentit de gir en un moviment circular.

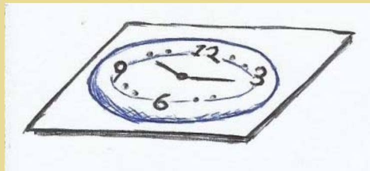
Només hem d'imitar aquest sentit amb els dits de la nostra mà dreta, tenint cura d'allargar el polze.

3.a) $\vec{k} \times \vec{\imath}$ i productes de tipus 

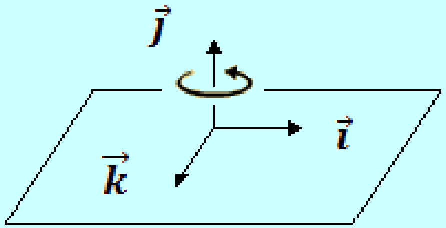




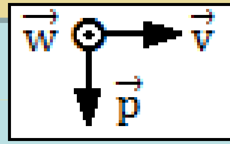
“Surt”

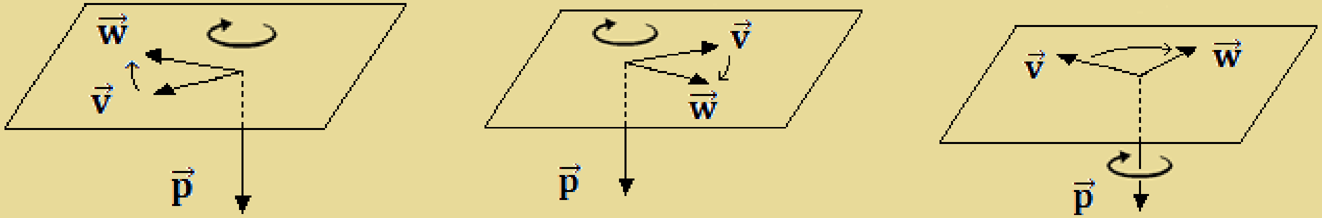


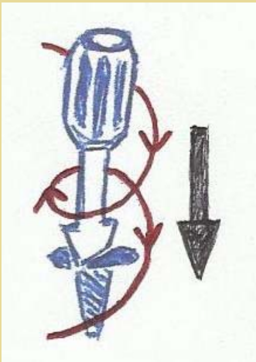
Antihorari

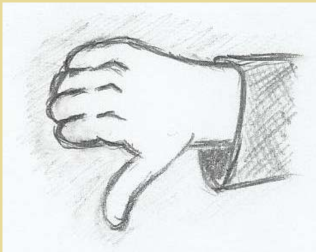


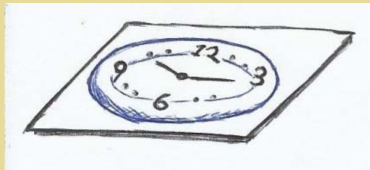
$$\vec{k} \times \vec{\imath} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\jmath}$$

3.b) $\vec{i} \times \vec{k}$ i productes de tipus 

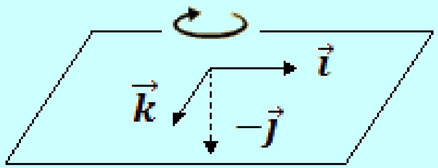




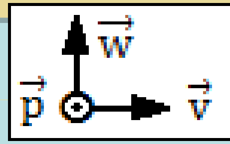


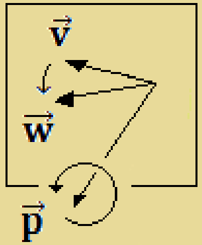


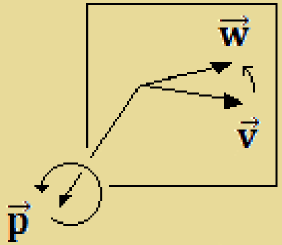
“Entra” Horari

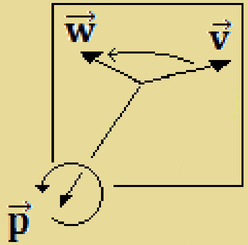


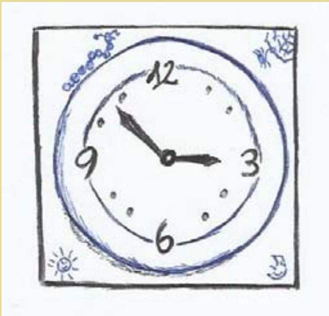
$$\vec{i} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j}$$

3.c) $\vec{i}\times\vec{j}$ i productes de tipus 

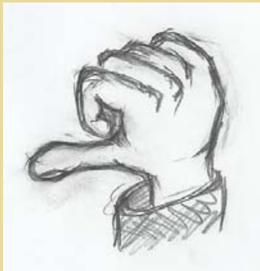


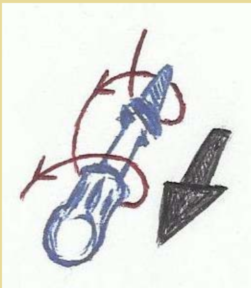




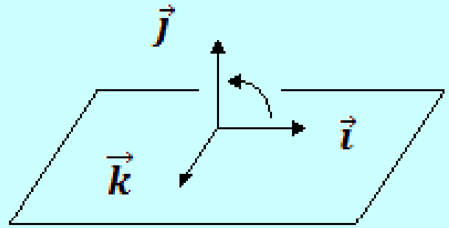


Antihorari

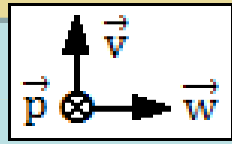


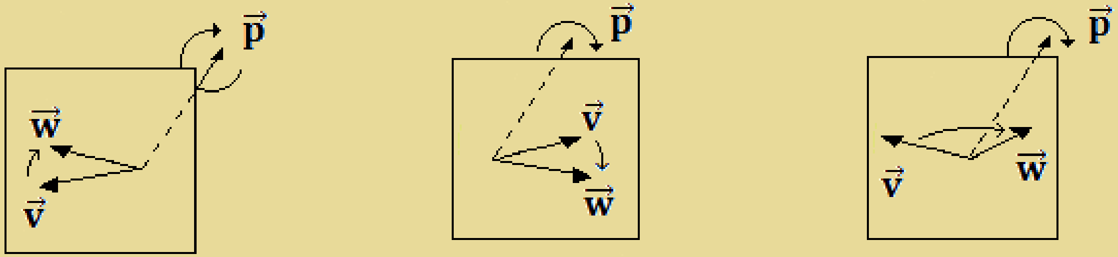


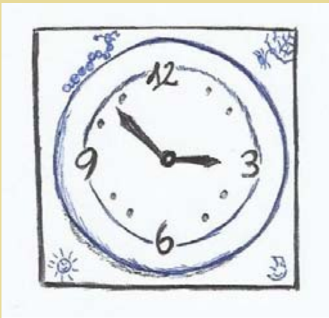
“Surt”



$$\vec{i}\times\vec{j} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = \vec{k}$$

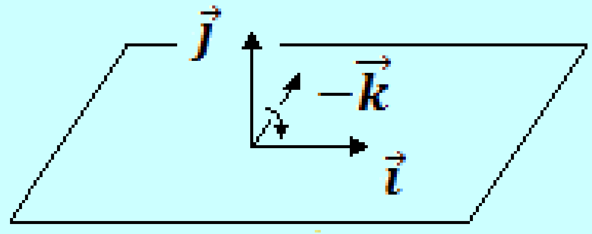
3.d) $\vec{j}\times\vec{i}$ i productes de tipus 



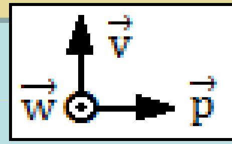


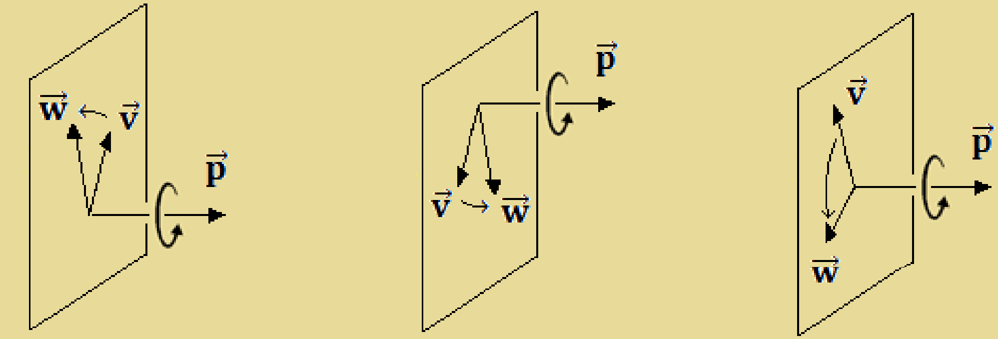
Horari

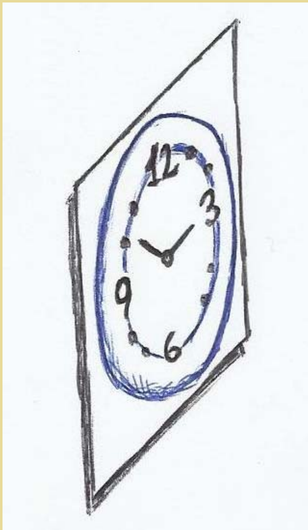
"Entra"

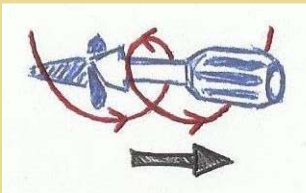


$$\vec{j}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\vec{k}$$

3.e) $\vec{j} \times \vec{k}$ i productes de tipus 

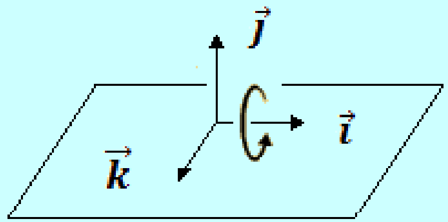




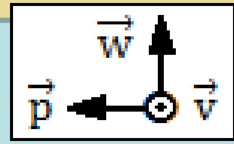


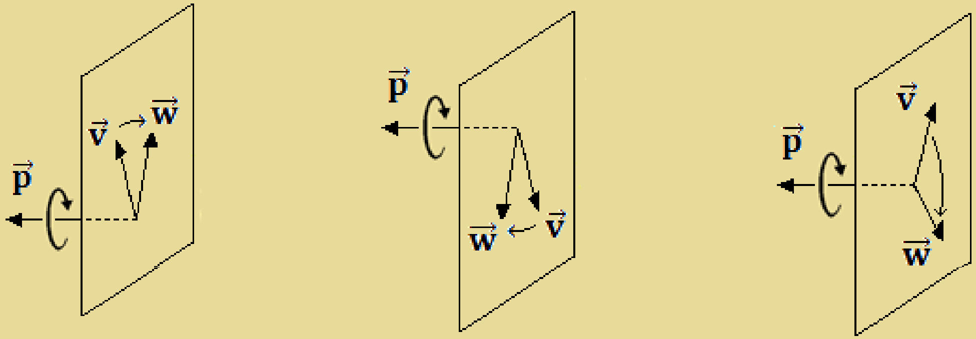
Antihorari

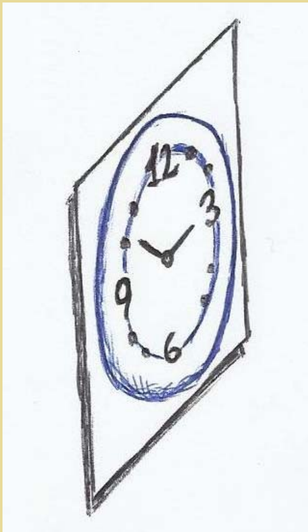
“Surt”

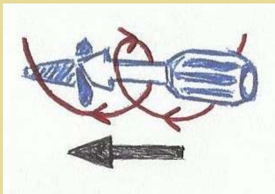


$$\vec{j} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}$$

3.f) $\boxed{\vec{k}\times\vec{j}}$ i productes de tipus 

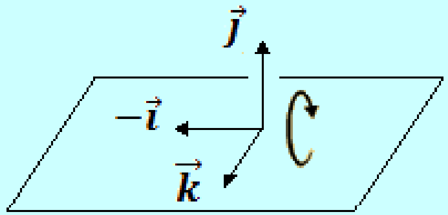






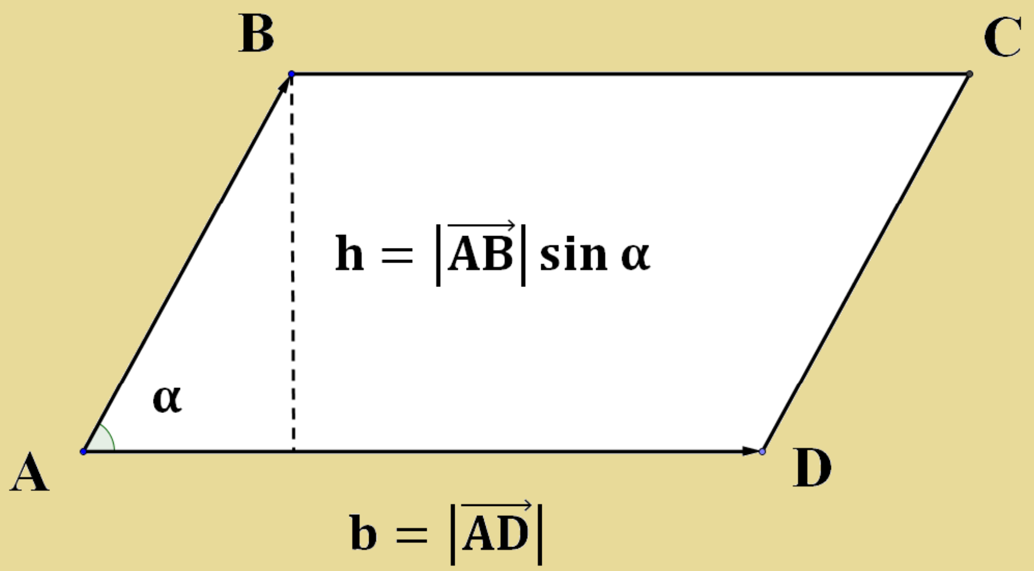
Horari

“Entra”

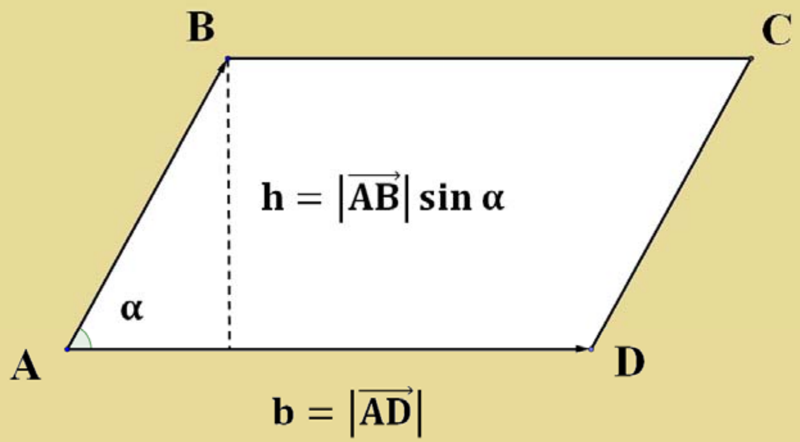


$$\vec{k}\times\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\vec{i}$$

4 Interpretació geomètrica

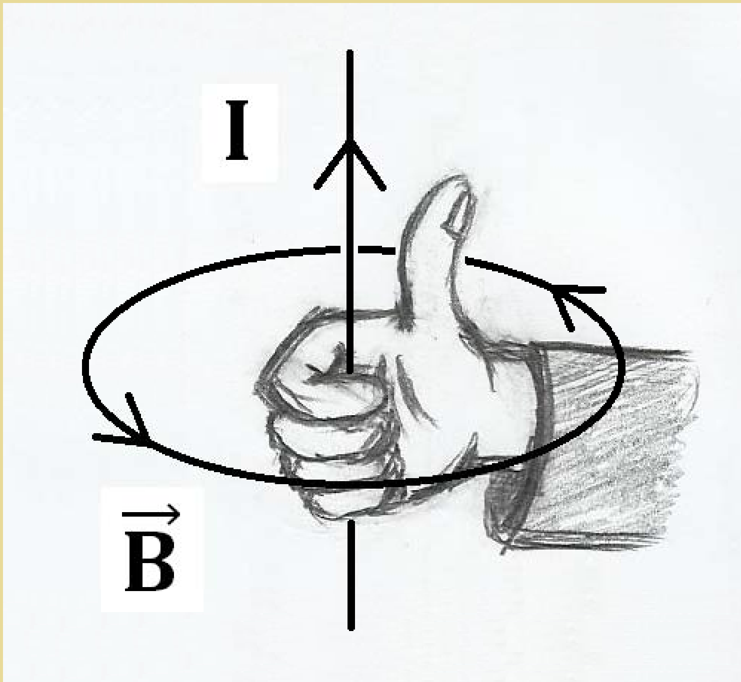


El mòdul del producte vectorial de dos vectors té el valor de l'àrea del paral·lelogram que aquests dos vectors defineixen:



$$\text{Àrea} = b \cdot h = |\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}| \sin\alpha = |\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}|$$

5 Camp $\vec{B}$: fonts i efectes

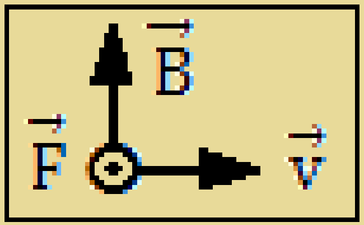


5.a) Força de Lorentz sobre càrregues

Un camp magnètic $\vec{B}$ exerceix una força sobre una partícula amb càrrega elèctrica *q* que depèn del valor de *q*, del valor del camp, i de la velocitat a la que es mou la partícula:

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

La darrera expressió és un cas particular del que es coneix com la "força de Lorentz".



$q > 0$

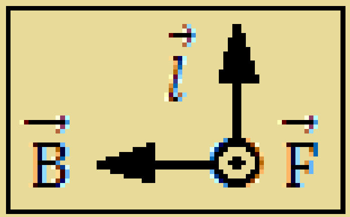
5.b) Força de Lorentz sobre corrents

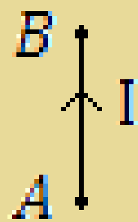
Sigui un tram, rectilini i petit, d'un fil conductor per on circula un corrent elèctric d'intensitat I.

Siguin *A* i *B* els dos extrems d'aquest tram (que rebrà el nom d' "element de corrent"), de manera que el sentit del corrent sigui *A* → *B*. Definirem com a $\vec{l}$ el vector que va de *A* a *B*.

Un camp magnètic extern $\vec{B}$ exercirà la següent força sobre aquest element de corrent:

$$\vec{F} = I\left(\vec{l} \times \vec{B}\right)$$

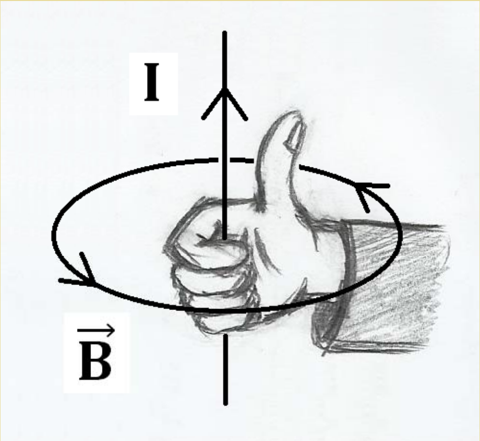


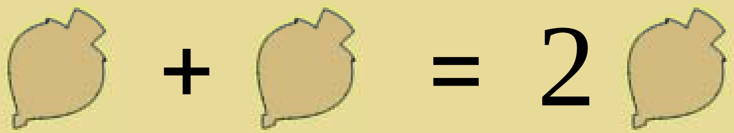


5.c) Camp $\vec{\mathbf{B}}$ que crea un corrent

Sigui un tram, rectilini i petit, d'un fil conductor per on circula un corrent elèctric d'intensitat I. Les línies del camp $\vec{B}$ creat pel corrent són circumferències amb centre en el cable. Cada circumferènca està continguda en un pla perpendicular al cable.

Agafant amb la mà dreta el fil de forma que el polze apunti segons el sentit del corrent, la resta de dits indicaran el sentit de les línies de camp.





Compartiu-ho!