

LA «PARADOJA DE ZENÓN»

*Taller de Problemas de Análisis
(Màster de Formació del Professorat)*

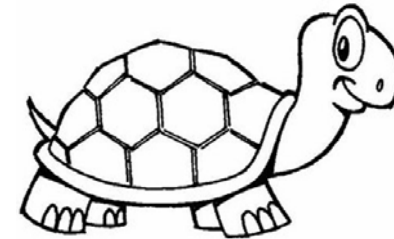
Pepe Ródenas Borja

1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.1)

La **Tortuga** le dijo a **Aquiles**:

«Te reto a una carrera».

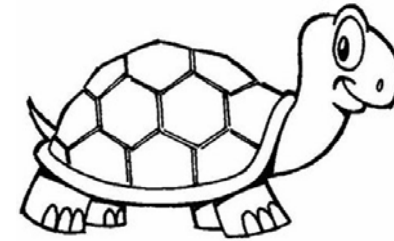


1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.2)

La **Tortuga** le dijo a **Aquiles**:

«Te reto a una carrera».



Aquiles le contestó:

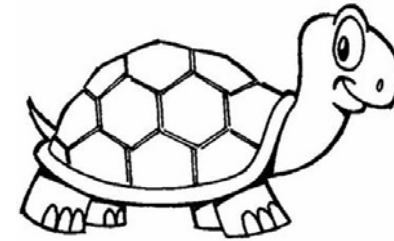
«De acuerdo. Pero como yo corro el doble de rápido que tú, te daré un kilómetro de ventaja».

1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.3)

La **Tortuga** le dijo a **Aquiles**:

«Te reto a una carrera».



Aquiles le contestó:

«De acuerdo. Pero como yo corro el doble de rápido que tú, te daré un kilómetro de ventaja».

La **Tortuga** sonrió y dijo:

«Como quieras. Pero te advierto que nunca me alcanzarás».

1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.4)

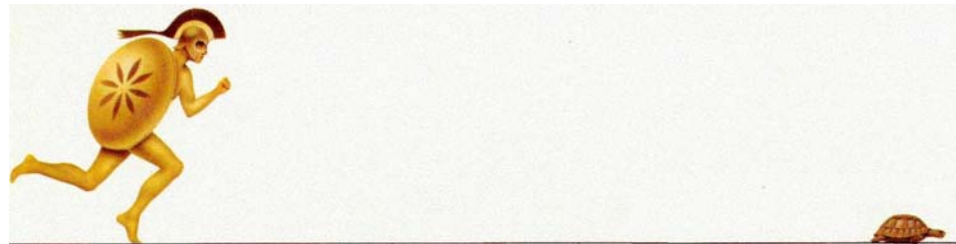
Aquiles pensó que la **Tortuga** se había vuelto loca, y le pidió que le explicara por qué no habría de poder alcanzarla.

1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.5)

Aquiles pensó que la **Tortuga** se había vuelto loca, y le pidió que le explicara por qué no habría de poder alcanzarla.

«Es verdad que tú eres más rápido», dijo ella.

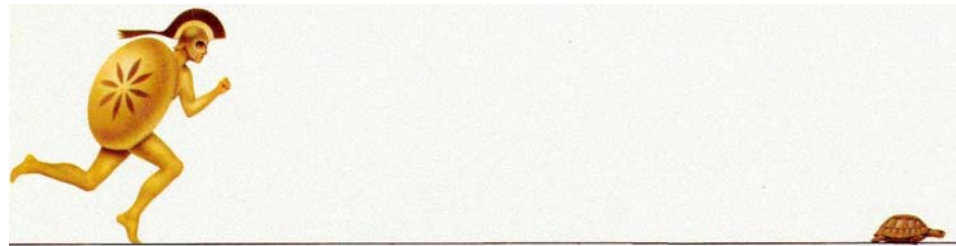


1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.6)

Aquiles pensó que la **Tortuga** se había vuelto loca, y le pidió que le explicara por qué no habría de poder alcanzarla.

«Es verdad que tú eres más rápido», dijo ella.



«Pero en el tiempo que a ti te cuesta recorrer el kilómetro que me das de ventaja, yo también habré corrido, y estaré en otro punto del camino».

1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.7)

La **Tortuga** continuó:

«De nuevo, en el tiempo que tú tardes en llegar a ese sitio, yo me habré vuelto a escapar ».

1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.8)

La **Tortuga** continuó:

«De nuevo, en el tiempo que tú tardes en llegar a ese sitio, yo me habré vuelto a escapar. Y así sucesivamente».

1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.9)

La **Tortuga** continuó:

«De nuevo, en el tiempo que tú tardes en llegar a ese sitio, yo me habré vuelto a escapar. Y así sucesivamente. O sea, que yo siempre te llevaré un trozo de ventaja, y por eso nunca me alcanzarás».

1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.10)

La **Tortuga** continuó:

«De nuevo, en el tiempo que tú tardes en llegar a ese sitio, yo me habré vuelto a escapar. Y así sucesivamente. O sea, que yo siempre te llevaré un trozo de ventaja, y por eso nunca me alcanzarás».



1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.11)

A lo cual **Aquiles**, confundido, repuso:

1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.12)

A lo cual **Aquiles**, confundido, repuso:

«Pero eso es absurdo... ¡si yo corro el doble de rápido que tú, te tengo que poder alcanzar!».

1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

(p.13)

A lo cual **Aquiles**, confundido, repuso:

«Pero eso es absurdo... ¡si yo corro el doble de rápido que tú, te tengo que poder alcanzar!».

Pero la **Tortuga** ya no le escuchaba, y había ido a colocarse en su puesto para empezar la carrera.

1. INTRODUCCIÓN: Aquiles y la tortuga

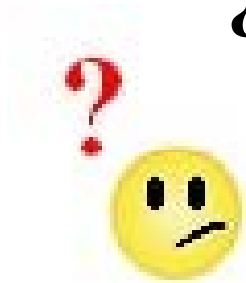
(p.14)

A lo cual **Aquiles**, confundido, repuso:

«Pero eso es absurdo... ¡si yo corro el doble de rápido que tú, te tengo que poder alcanzar!».

Pero la **Tortuga** ya no le escuchaba, y había ido a colocarse en su puesto para empezar la carrera.

¿Quién de los dos crees que tiene razón?



2. Una suma de infinitas cosas

(p.15)



Vamos a intentar entender por qué parece que la **Tortuga** pueda tener razón.

2. Una suma de infinitas cosas

(p.16)

Vamos a intentar entender por qué parece que la **Tortuga** pueda tener razón.



Cada vez que **Aquiles** llega a donde la **Tortuga** acaba de estar, ha tenido que recorrer **una cierta distancia** (lo cual le ha llevado cierto **tiempo**).

2. Una suma de infinitas cosas

(p.17)

Vamos a intentar entender por qué parece que la **Tortuga** pueda tener razón.

Cada vez que **Aquiles** llega a donde la **Tortuga** acaba de estar, ha tenido que recorrer **una cierta distancia** (lo cual le ha llevado cierto **tiempo**).



Como la **Tortuga** ya no está allí, **Aquiles** ha de volver a correr, para así cubrir la nueva distancia que ahora lo separa de la **Tortuga**

2. Una suma de infinitas cosas

(p.18)

Vamos a intentar entender por qué parece que la **Tortuga** pueda tener razón.

Cada vez que **Aquiles** llega a donde la **Tortuga** acaba de estar, ha tenido que recorrer **una cierta distancia** (lo cual le ha llevado cierto **tiempo**).



Como la **Tortuga** ya no está allí, **Aquiles** ha de volver a correr, para así cubrir la nueva distancia que ahora lo separa de la **Tortuga** (y para ello tiene que invertir más tiempo!).

2. Una suma de infinitas cosas

(p.19)

La clave está en que podemos repetir este razonamiento tantas veces como queramos, y **Aquiles** irá sumando más y más tiempo invertido en la carrera.

2. Una suma de infinitas cosas

(p.20)

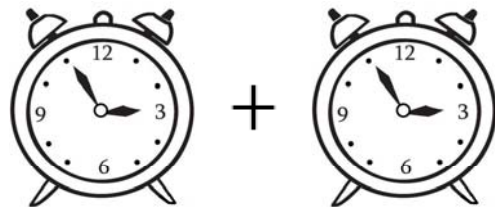
La clave está en que podemos repetir este razonamiento tantas veces como queramos, y **Aquiles** irá sumando más y más tiempo invertido en la carrera.



2. Una suma de infinitas cosas

(p.21)

La clave está en que podemos repetir este razonamiento tantas veces como queramos, y **Aquiles** irá sumando más y más tiempo invertido en la carrera.



2. Una suma de infinitas cosas

(p.22)

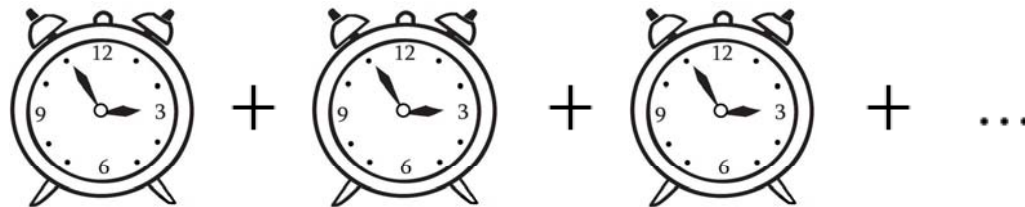
La clave está en que podemos repetir este razonamiento tantas veces como queramos, y **Aquiles** irá sumando más y más tiempo invertido en la carrera.



2. Una suma de infinitas cosas

(p.23)

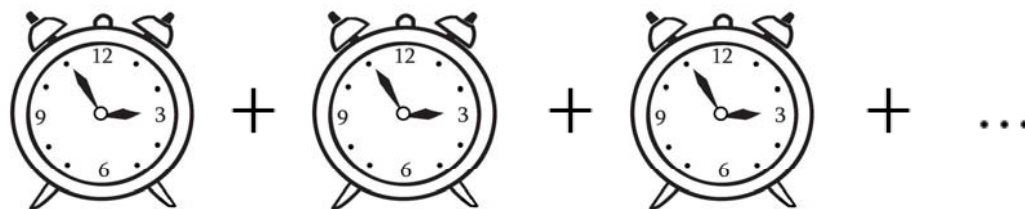
La clave está en que podemos repetir este razonamiento tantas veces como queramos, y **Aquiles** irá sumando más y más tiempo invertido en la carrera.



2. Una suma de infinitas cosas

(p.24)

La clave está en que podemos repetir este razonamiento tantas veces como queramos, y **Aquiles** irá sumando más y más tiempo invertido en la carrera.



Parece que esto nunca vaya a acabarse: después de cada paso del proceso, **Aquiles** todavía no ha alcanzado a la **Tortuga**, y siempre ha de volver a correr y sumar más tiempo.

2. Una suma de infinitas cosas

(p.25)

Dicho de otra manera:

2. Una suma de infinitas cosas

(p.26)

Dicho de otra manera:

Parece que, si sumamos **infinitas cantidades** de tiempo...

2. Una suma de infinitas cosas

(p.27)

Dicho de otra manera:

Parece que, si sumamos **infinitas cantidades** de tiempo...

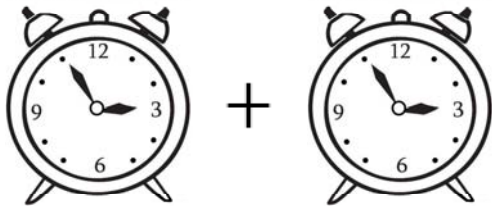


2. Una suma de infinitas cosas

(p.28)

Dicho de otra manera:

Parece que, si sumamos **infinitas cantidades** de tiempo...



2. Una suma de infinitas cosas

(p.29)

Dicho de otra manera:

Parece que, si sumamos **infinitas cantidades** de tiempo...

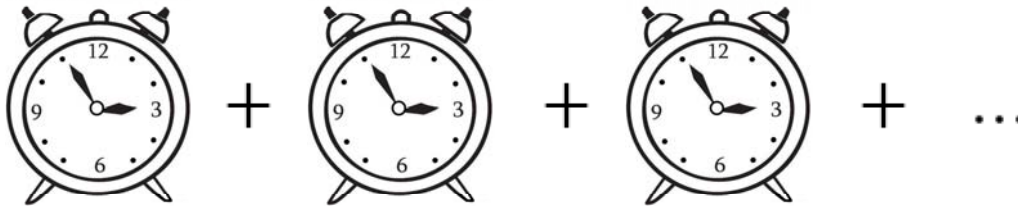


2. Una suma de infinitas cosas

(p.30)

Dicho de otra manera:

Parece que, si sumamos **infinitas cantidades** de tiempo...

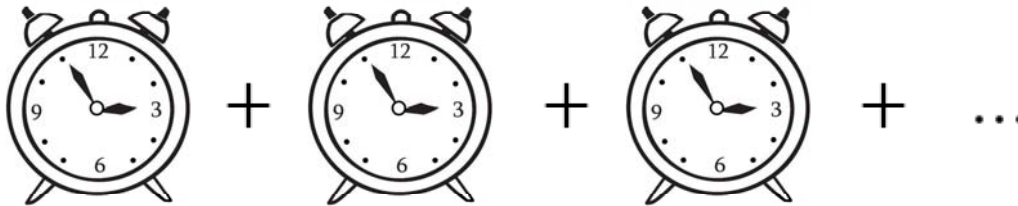


2. Una suma de infinitas cosas

(p.31)

Dicho de otra manera:

Parece que, si sumamos **infinitas cantidades** de tiempo...



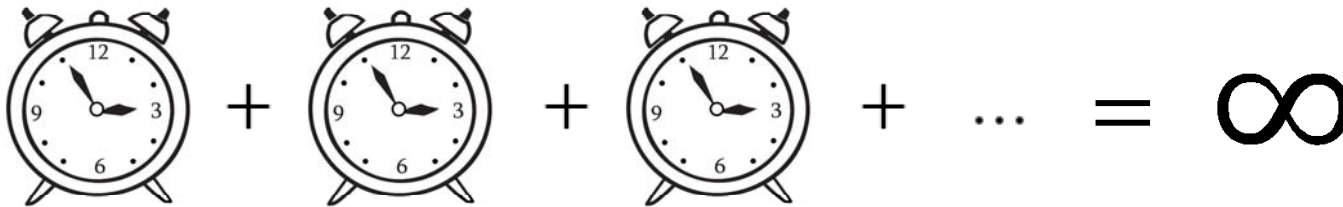
...el resultado sea un **tiempo infinito!**

2. Una suma de infinitas cosas

(p.32)

Dicho de otra manera:

Parece que, si sumamos **infinitas cantidades** de tiempo...



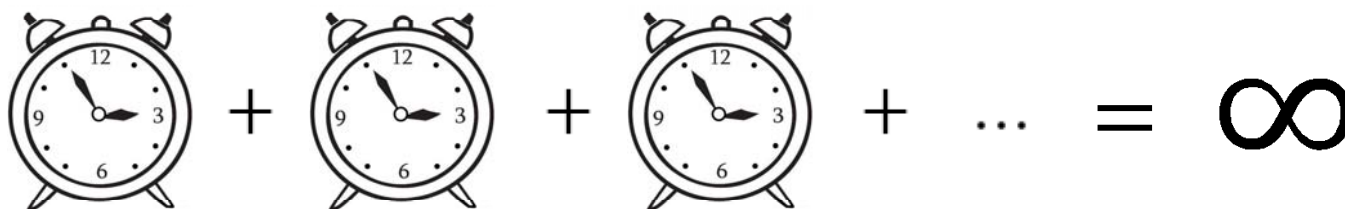
...el resultado sea un **tiempo infinito!**

2. Una suma de infinitas cosas

(p.33)

Dicho de otra manera:

Parece que, si sumamos **infinitas cantidades** de tiempo...



...el resultado sea un **tiempo infinito!**

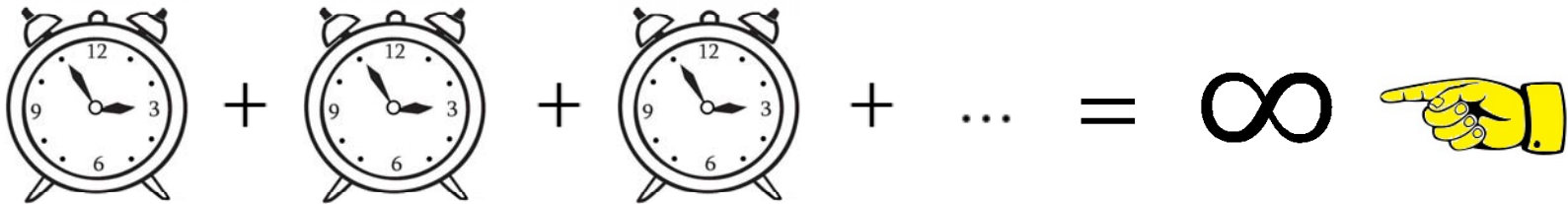
¿SERÁ CORRECTO ESTE RAZONAMIENTO?

2. Una suma de infinitas cosas

(p.34)

Dicho de otra manera:

Parece que, si sumamos **infinitas cantidades** de tiempo...



...el resultado sea un **tiempo infinito!**

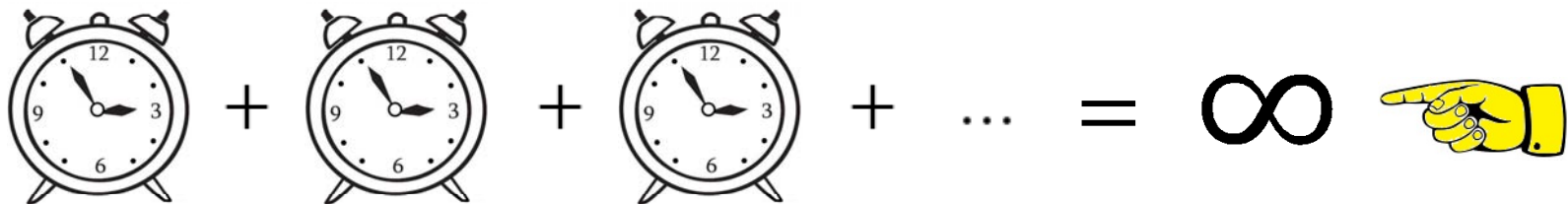
¿SERÁ CORRECTO ESTE RAZONAMIENTO?

2. Una suma de infinitas cosas

(p.35)

Dicho de otra manera:

Parece que, si sumamos **infinitas cantidades** de tiempo...



...el resultado sea un **tiempo infinito!**



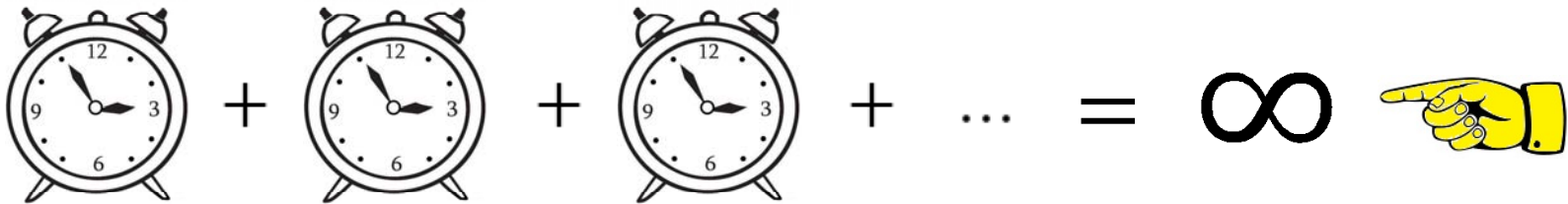
¿SERÁ CORRECTO ESTE RAZONAMIENTO?

2. Una suma de infinitas cosas

(p.36)

Dicho de otra manera:

Parece que, si sumamos **infinitas cantidades** de tiempo...



...el resultado sea un **tiempo infinito!**



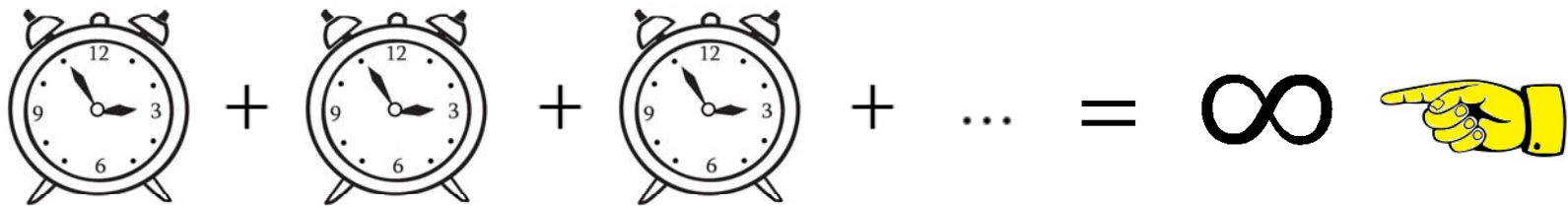
¿SERÁ CORRECTO ESTE RAZONAMIENTO?

2. Una suma de infinitas cosas

(p.37)

Dicho de otra manera:

Parece que, si sumamos **infinitas cantidades** de tiempo...



...el resultado sea un **tiempo infinito!**



¿SERÁ CORRECTO ESTE RAZONAMIENTO?

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.38)

Vamos a hacer un **experimento** para comprobar si el anterior razonamiento es correcto o no.

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.39)

Vamos a hacer un **experimento** para comprobar si el anterior razonamiento es correcto o no.

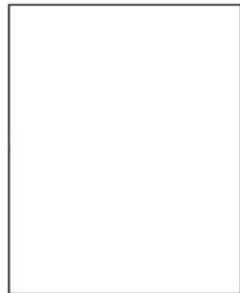
Cojamos un folio y cortémoslo en dos partes iguales (dos “**cuartillas**”):

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.40)

Vamos a hacer un **experimento** para comprobar si el anterior razonamiento es correcto o no.

Cojamos un folio y cortémoslo en dos partes iguales (dos “**cuartillas**”):

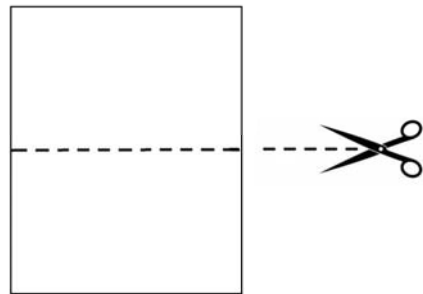


3. Partiendo papeles por la mitad

(p.41)

Vamos a hacer un **experimento** para comprobar si el anterior razonamiento es correcto o no.

Cojamos un folio y cortémoslo en dos partes iguales (dos “**cuartillas**”):

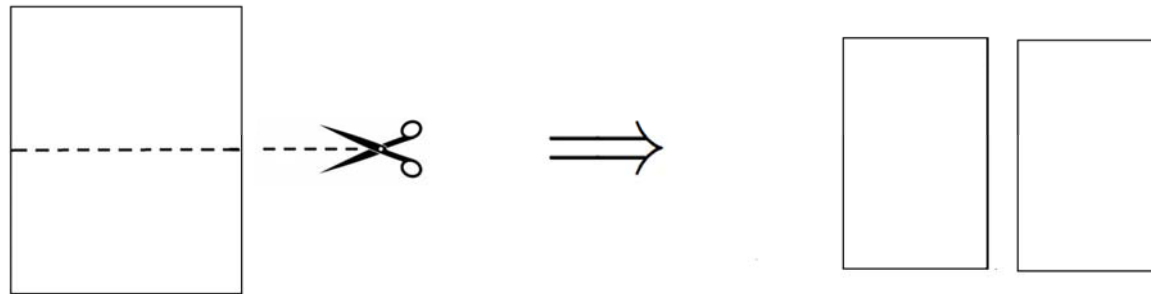


3. Partiendo papeles por la mitad

(p.42)

Vamos a hacer un **experimento** para comprobar si el anterior razonamiento es correcto o no.

Cojamos un folio y cortémoslo en dos partes iguales (dos “**cuartillas**”):



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.43)

Ahora recordemos que **Aquiles** le había dado 1 km de ventaja a la **Tortuga**. Supongamos que el tiempo que le cuesta cubrir esta distancia es **un cuarto de hora**.

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.44)

Ahora recordemos que **Aquiles** le había dado 1 km de ventaja a la **Tortuga**. Supongamos que el tiempo que le cuesta cubrir esta distancia es **un cuarto de hora**.

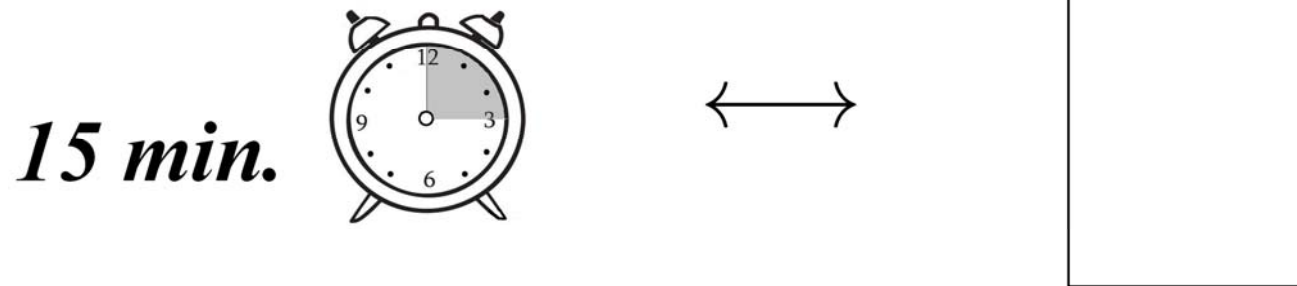
Vamos a imaginar que el área de **una cuartilla** representa ese cuarto de hora:

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.45)

Ahora recordemos que **Aquiles** le había dado 1 km de ventaja a la **Tortuga**. Supongamos que el tiempo que le cuesta cubrir esta distancia es **un cuarto de hora**.

Vamos a imaginar que el área de **una cuartilla** representa ese cuarto de hora:



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.46)

Por lo tanto, las dos cuartillas que antes hemos fabricado representan dos cuartos de hora.

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.47)

Por lo tanto, las dos cuartillas que antes hemos fabricado representan dos cuartos de hora.

Para **empezar el experimento**, lo primero que hacemos es ponernos esas dos cuartillas en la **mano derecha**.

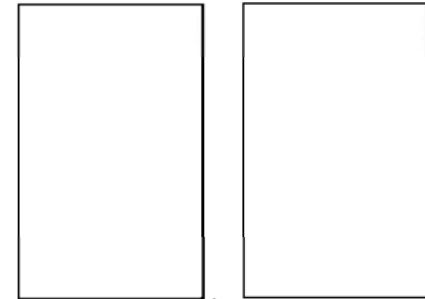


3. Partiendo papeles por la mitad

(p.48)

Por lo tanto, las dos cuartillas que antes hemos fabricado representan dos cuartos de hora.

Para **empezar el experimento**, lo primero que hacemos es ponernos esas dos cuartillas en la **mano derecha**.



Luego abrimos la izquierda

3. Partiendo papeles por la mitad

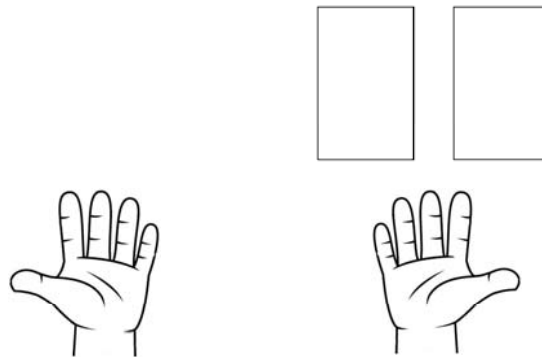
(p.49)

...y pasamos a ella una de las dos cuartillas que hay en la derecha:

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.50)

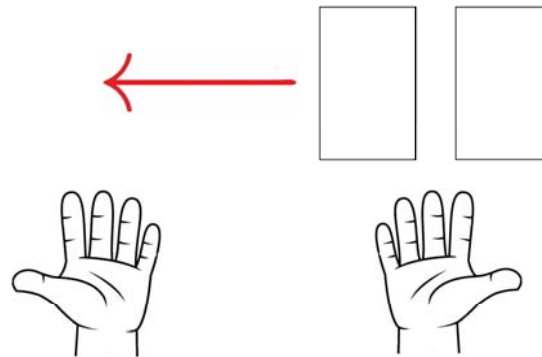
...y pasamos a ella una de las dos cuartillas que hay en la derecha:



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.51)

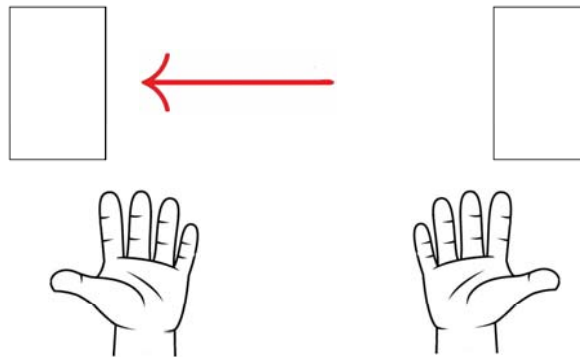
...y pasamos a ella una de las dos cuartillas que hay en la derecha:



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.52)

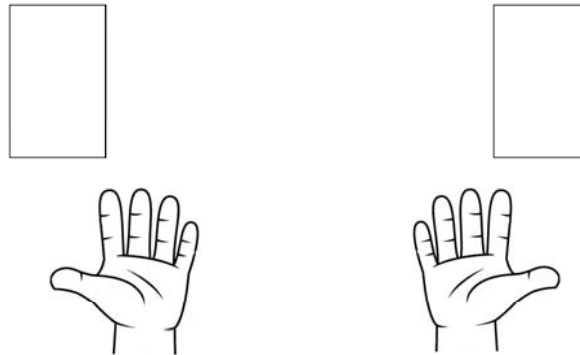
...y pasamos a ella una de las dos cuartillas que hay en la derecha:



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.53)

...y pasamos a ella una de las dos cuartillas que hay en la derecha:



Esa cuartilla representa el tiempo que le cuesta a **Aquiles** recorrer el primer kilómetro que lo separaba de la **Tortuga**.

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.54)

Para contar el resto de intervalos de tiempo que **Aquiles** va acumulando, seguiremos la misma técnica de **ir pasando papel** de la mano derecha a la izquierda.

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.55)

Para contar el resto de intervalos de tiempo que **Aquiles** va acumulando, seguiremos la misma técnica de **ir pasando papel** de la mano derecha a la izquierda.

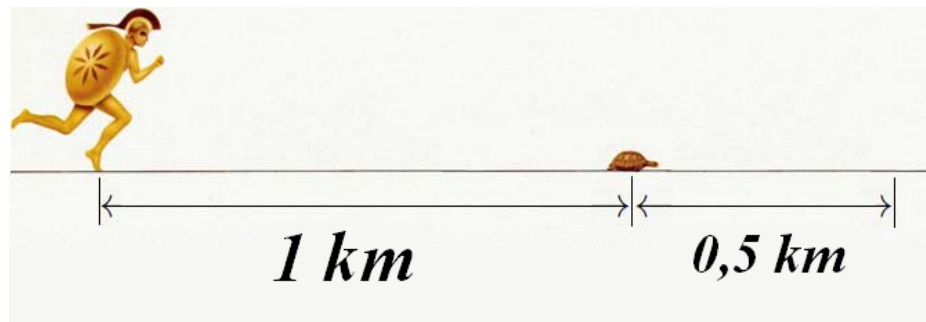
Así, como **Aquiles** corre el doble de rápido que la **Tortuga**, mientras él ha avanzado un kilómetro, ella habrá recorrido medio.

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.56)

Para contar el resto de intervalos de tiempo que **Aquiles** va acumulando, seguiremos la misma técnica de **ir pasando papel** de la mano derecha a la izquierda.

Así, como **Aquiles** corre el doble de rápido que la **Tortuga**, mientras él ha avanzado un kilómetro, ella habrá recorrido medio.



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.57)

Eso significa que, en la segunda etapa, **Aquiles** invertirá **medio cuarto de hora.**

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.58)

Eso significa que, en la segunda etapa, **Aquiles** invertirá **medio cuarto de hora**.

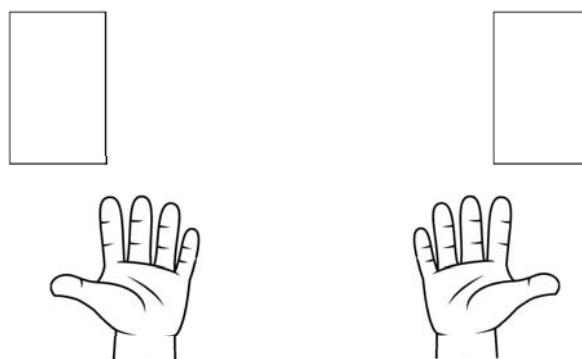
Por lo tanto, hemos de pasar **media cuartilla** de la mano derecha a la izquierda:

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.59)

Eso significa que, en la segunda etapa, **Aquiles** invertirá **medio cuarto de hora**.

Por lo tanto, hemos de pasar **media cuartilla** de la mano derecha a la izquierda:

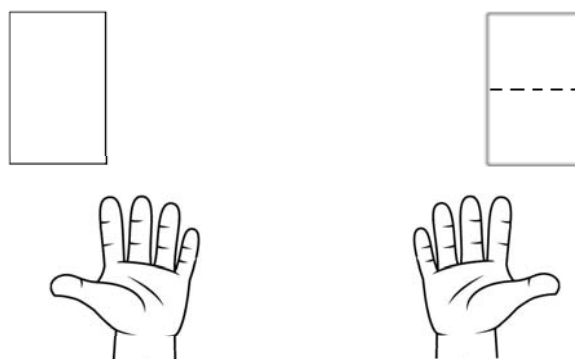


3. Partiendo papeles por la mitad

(p.60)

Eso significa que, en la segunda etapa, **Aquiles** invertirá **medio cuarto de hora**.

Por lo tanto, hemos de pasar **media cuartilla** de la mano derecha a la izquierda:

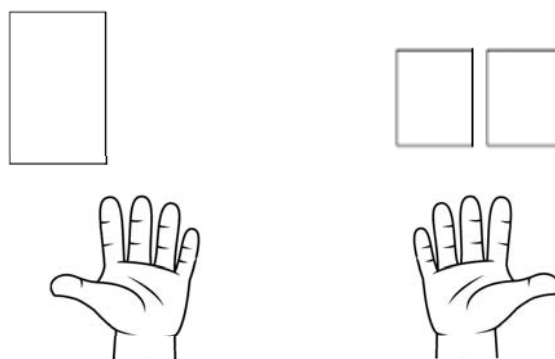


3. Partiendo papeles por la mitad

(p.61)

Eso significa que, en la segunda etapa, **Aquiles** invertirá **medio cuarto de hora**.

Por lo tanto, hemos de pasar **media cuartilla** de la mano derecha a la izquierda:

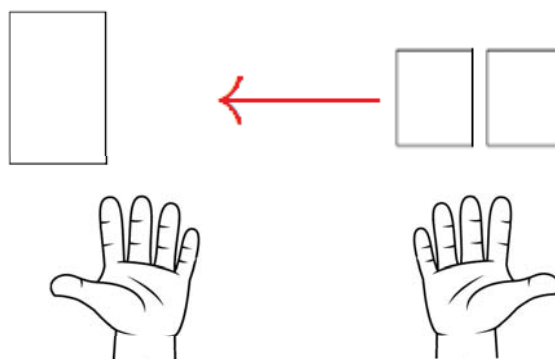


3. Partiendo papeles por la mitad

(p.62)

Eso significa que, en la segunda etapa, **Aquiles** invertirá **medio cuarto de hora**.

Por lo tanto, hemos de pasar **media cuartilla** de la mano derecha a la izquierda:

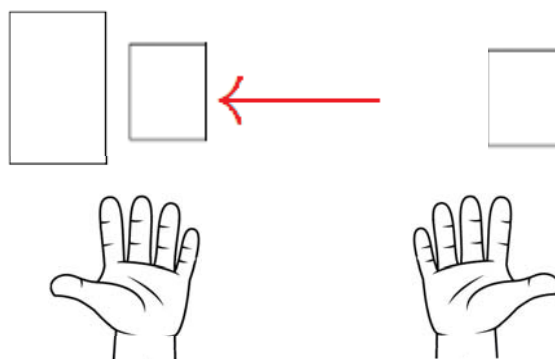


3. Partiendo papeles por la mitad

(p.63)

Eso significa que, en la segunda etapa, **Aquiles** invertirá **medio cuarto de hora**.

Por lo tanto, hemos de pasar **media cuartilla** de la mano derecha a la izquierda:

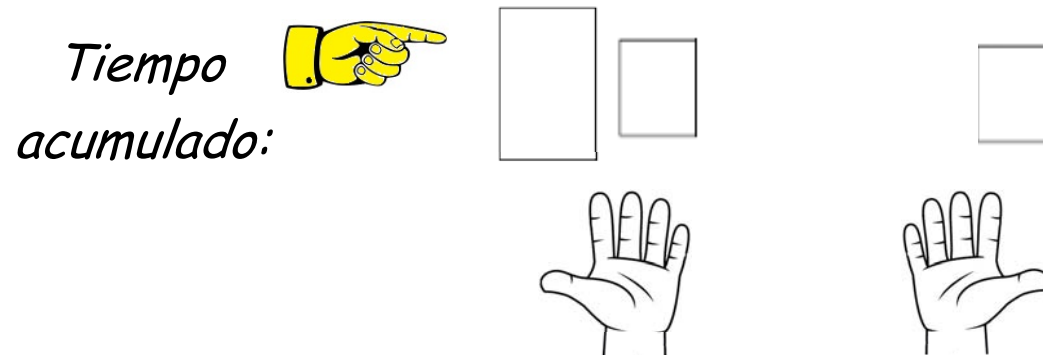


3. Partiendo papeles por la mitad

(p.64)

Eso significa que, en la segunda etapa, **Aquiles** invertirá **medio cuarto de hora**.

Por lo tanto, hemos de pasar **media cuartilla** de la mano derecha a la izquierda:



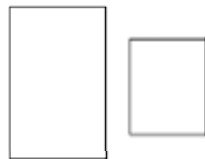
3. Partiendo papeles por la mitad

(p.65)

Eso significa que, en la segunda etapa, **Aquiles** invertirá **medio cuarto de hora**.

Por lo tanto, hemos de pasar **media cuartilla** de la mano derecha a la izquierda:

*Tiempo
acumulado:*



« 1 cuarto de h.
más $\frac{1}{2}$ cuarto de h. »



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.66)

Ahora tenemos que añadir el tiempo correspondiente a la **tercera etapa**

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.67)

Ahora tenemos que añadir el tiempo correspondiente a la **tercera etapa** ...pero enseguida nos damos cuenta de que, aplicando un razonamiento idéntico al que acabamos de usar para la segunda,

3. Partiendo papeles por la mitad

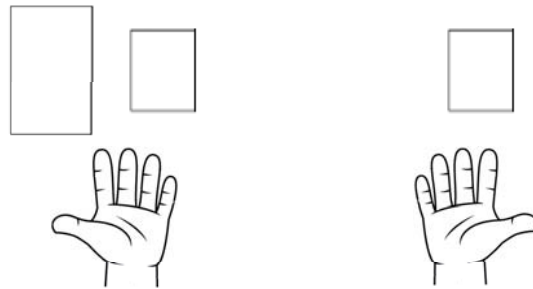
(p.68)

Ahora tenemos que añadir el tiempo correspondiente a la **tercera etapa** ...pero enseguida nos damos cuenta de que, aplicando un razonamiento idéntico al que acabamos de usar para la segunda, lo único que hace falta es **partir por la mitad** el papel que hay en la mano derecha y **pasarlo a la izquierda:**

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.69)

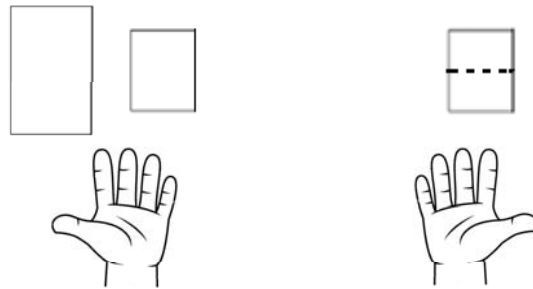
Ahora tenemos que añadir el tiempo correspondiente a la **tercera etapa** ...pero enseguida nos damos cuenta de que, aplicando un razonamiento idéntico al que acabamos de usar para la segunda, lo único que hace falta es **partir por la mitad** el papel que hay en la mano derecha y **pasarlo a la izquierda**:



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.70)

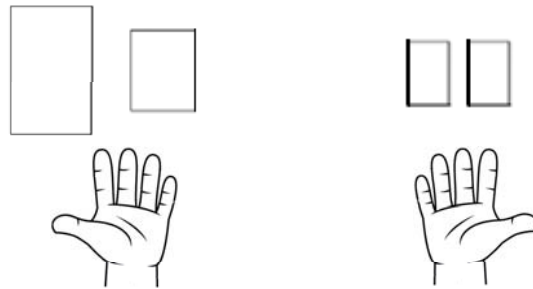
Ahora tenemos que añadir el tiempo correspondiente a la **tercera etapa** ...pero enseguida nos damos cuenta de que, aplicando un razonamiento idéntico al que acabamos de usar para la segunda, lo único que hace falta es **partir por la mitad** el papel que hay en la mano derecha y **pasarlo a la izquierda**:



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.71)

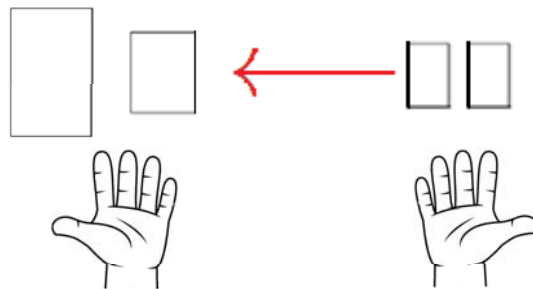
Ahora tenemos que añadir el tiempo correspondiente a la **tercera etapa** ...pero enseguida nos damos cuenta de que, aplicando un razonamiento idéntico al que acabamos de usar para la segunda, lo único que hace falta es **partir por la mitad** el papel que hay en la mano derecha y **pasarlo a la izquierda**:



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.72)

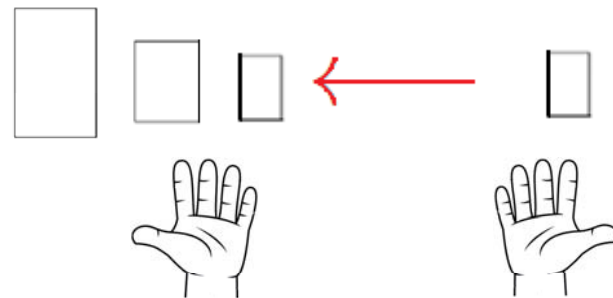
Ahora tenemos que añadir el tiempo correspondiente a la **tercera etapa** ...pero enseguida nos damos cuenta de que, aplicando un razonamiento idéntico al que acabamos de usar para la segunda, lo único que hace falta es **partir por la mitad** el papel que hay en la mano derecha y **pasarlo a la izquierda**:



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.73)

Ahora tenemos que añadir el tiempo correspondiente a la **tercera etapa** ...pero enseguida nos damos cuenta de que, aplicando un razonamiento idéntico al que acabamos de usar para la segunda, lo único que hace falta es **partir por la mitad** el papel que hay en la mano derecha y **pasarlo a la izquierda**:



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.74)

Ya hemos comprendido cómo **representar** la suma de los tiempos de cada etapa con el método de los papelitos.

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.75)

Ya hemos comprendido cómo **representar** la suma de los tiempos de cada etapa con el método de los papelitos.

Pero recordemos **nuestro objetivo**:

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.76)

Ya hemos comprendido cómo **representar** la suma de los tiempos de cada etapa con el método de los papelitos.

Pero recordemos **nuestro objetivo**:

Queríamos saber qué pasa si pretendemos sumar los tiempos de todas las etapas...

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.77)

Ya hemos comprendido cómo **representar** la suma de los tiempos de cada etapa con el método de los papelitos.

Pero recordemos **nuestro objetivo**:

Queríamos saber qué pasa si pretendemos sumar los tiempos de todas las etapas... ¡y hay **infinitas etapas!**

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.78)

Ya hemos comprendido cómo **representar** la suma de los tiempos de cada etapa con el método de los papelitos.

Pero recordemos **nuestro objetivo**:

Queríamos saber qué pasa si pretendemos sumar los tiempos de todas las etapas... ¡y hay **infinitas etapas!**



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.79)

¿Cómo vamos a hacer una suma
con infinitos sumandos?

3. Partiendo papeles por la mitad

(p.80)

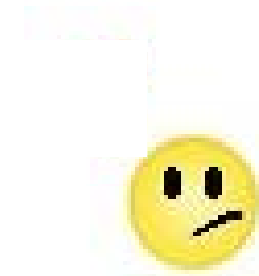
¿Cómo vamos a hacer una suma
con infinitos sumandos?



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.81)

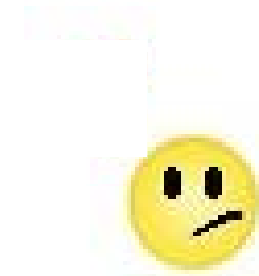
Ya que tenemos el método de los papelitos, vamos a utilizarlo para examinar qué ocurre cuando intentamos sumar *muchas* etapas de la carrera...



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.82)

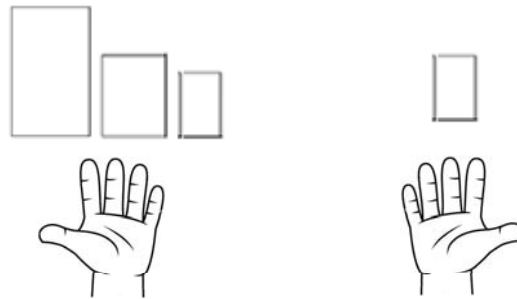
Ya que tenemos el método de los papelitos, vamos a utilizarlo para examinar qué ocurre cuando intentamos sumar *muchas* etapas de la carrera... Quizá logremos encontrar alguna pista!



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.83)

Ya que tenemos el método de los papelitos, vamos a utilizarlo para examinar qué ocurre cuando intentamos sumar *muchas* etapas de la carrera... Quizá logremos encontrar alguna pista!



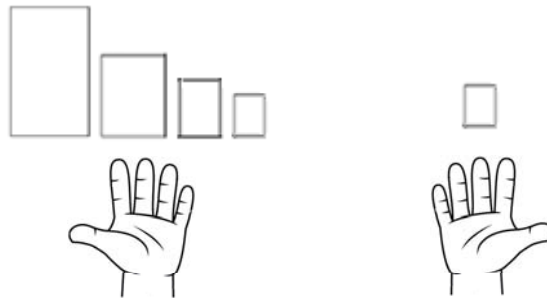
3ª etapa



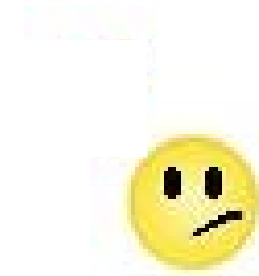
3. Partiendo papeles por la mitad

(p.84)

Ya que tenemos el método de los papelitos, vamos a utilizarlo para examinar qué ocurre cuando intentamos sumar *muchas* etapas de la carrera... Quizá logremos encontrar alguna pista!



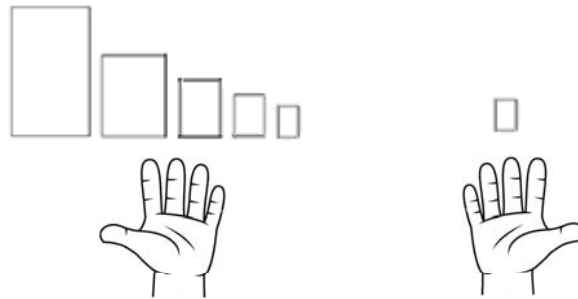
4^a etapa



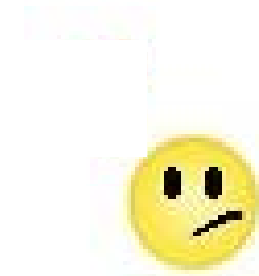
3. Partiendo papeles por la mitad

(p.85)

Ya que tenemos el método de los papelitos, vamos a utilizarlo para examinar qué ocurre cuando intentamos sumar *muchas* etapas de la carrera... Quizá logremos encontrar alguna pista!



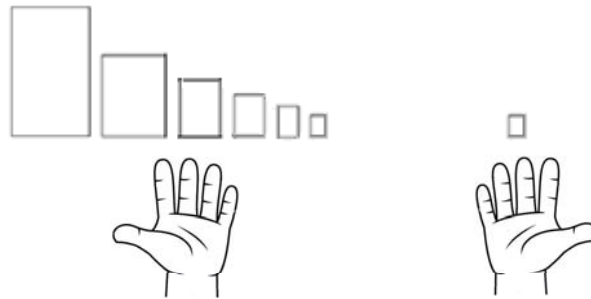
5ª etapa



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.86)

Ya que tenemos el método de los papelitos, vamos a utilizarlo para examinar qué ocurre cuando intentamos sumar *muchas* etapas de la carrera... Quizá logremos encontrar alguna pista!



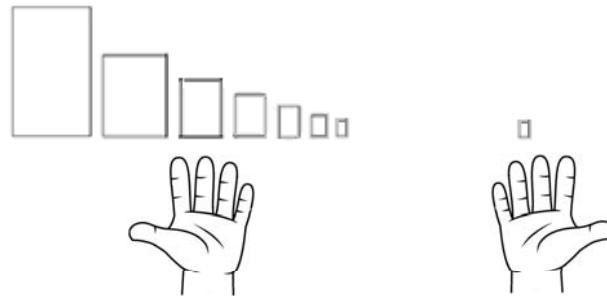
6^a etapa



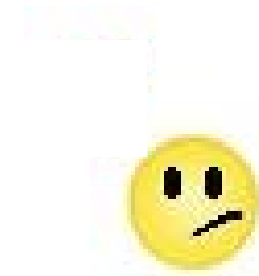
3. Partiendo papeles por la mitad

(p.87)

Ya que tenemos el método de los papelitos, vamos a utilizarlo para examinar qué ocurre cuando intentamos sumar *muchas* etapas de la carrera... Quizá logremos encontrar alguna pista!



7ª etapa



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.88)

Ya que tenemos el método de los papelitos, vamos a utilizarlo para examinar qué ocurre cuando intentamos sumar *muchas* etapas de la carrera... Quizá logremos encontrar alguna pista!



8ª etapa



3. Partiendo papeles por la mitad

(p.89)

¡Ya está claro!



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.90)

La solución del problema consiste en darse cuenta de que, por más etapas que contemos, la **cantidad total de papel** que tenemos **siempre es la misma**:



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.91)

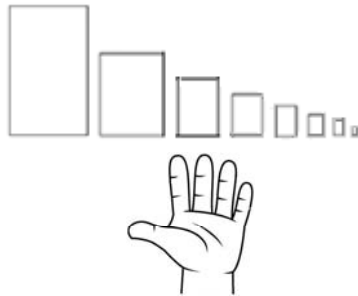
La solución del problema consiste en darse cuenta de que, por más etapas que contemos, la **cantidad total de papel** que tenemos **siempre es la misma**: ¡Las dos cuartillas con las que hemos empezado!



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.92)

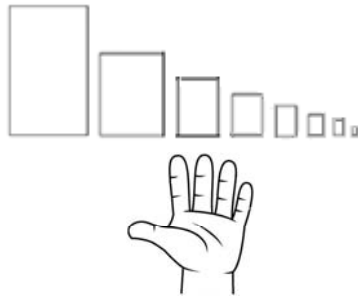
Por lo tanto, la cantidad de papel sobre la mano izquierda



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.93)

Por lo tanto, la cantidad de papel sobre la mano izquierda



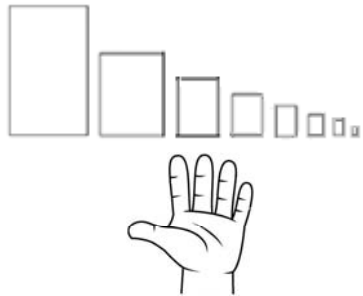
*Cantidad de papel
en la izquierda*



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.94)

Por lo tanto, la cantidad de papel sobre la mano izquierda tendrá que ser SIEMPRE menor que “dos cuartillas”.



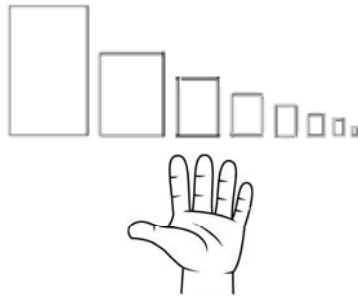
*Cantidad de papel
en la izquierda*



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.95)

Por lo tanto, la cantidad de papel sobre la mano izquierda tendrá que ser SIEMPRE menor que “dos cuartillas”.



*Cantidad de papel
en la izquierda*



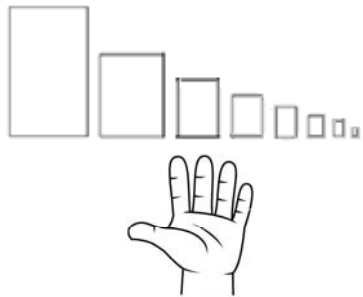
Dos cuartillas



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.96)

Por lo tanto, la cantidad de papel sobre la mano izquierda tendrá que ser SIEMPRE menor que “dos cuartillas”.



*Cantidad de papel
en la izquierda*



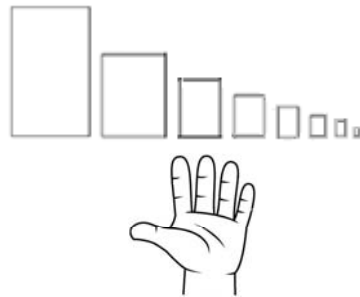
Dos cuartillas



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.97)

Por lo tanto, la cantidad de papel sobre la mano izquierda tendrá que ser SIEMPRE menor que “dos cuartillas”.



*Cantidad de papel
en la izquierda*



(menor que)



Dos cuartillas



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.98)

Pero no olvidemos que estamos usando el papel para representar el tiempo:



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.99)

Pero no olvidemos que estamos usando el papel para representar el tiempo: el de la izquierda significa el tiempo que **Aquiles** lleva corriendo tras la **Tortuga**,



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.100)

Pero no olvidemos que estamos usando el papel para representar el tiempo: el de la izquierda significa el tiempo que **Aquiles** lleva corriendo tras la **Tortuga**,



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.101)

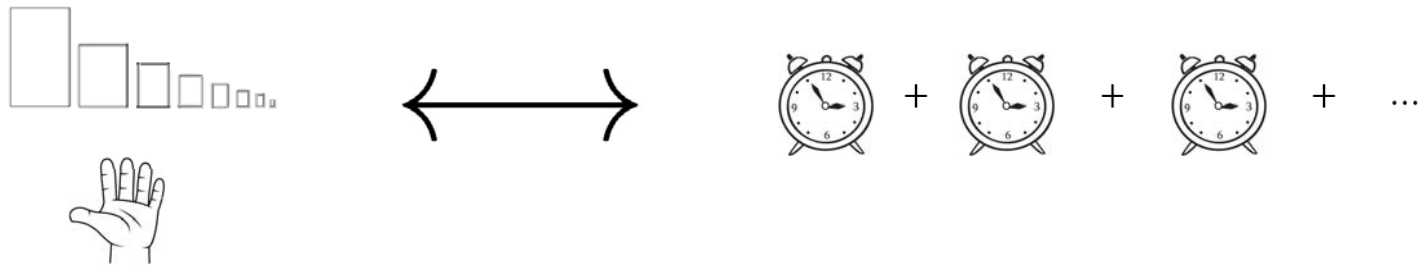
Pero no olvidemos que estamos usando el papel para representar el tiempo: el de la izquierda significa el tiempo que **Aquiles** lleva corriendo tras la **Tortuga**,



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.102)

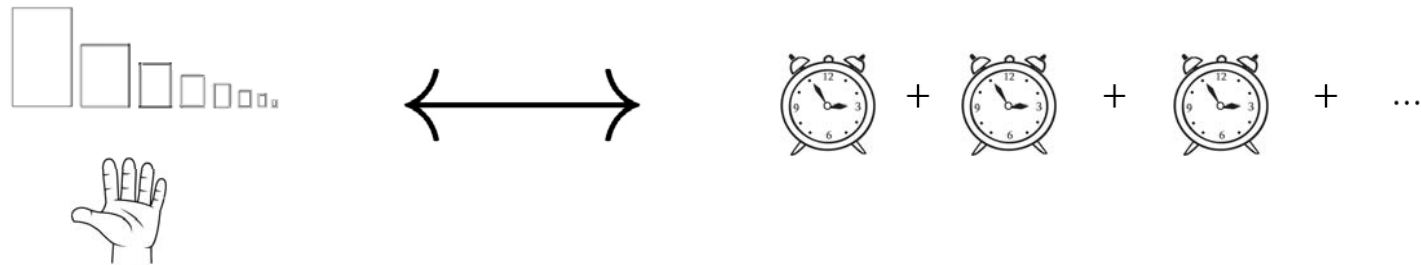
Pero no olvidemos que estamos usando el papel para representar el tiempo: el de la izquierda significa el tiempo que **Aquiles** lleva corriendo tras la **Tortuga**,



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.103)

Pero no olvidemos que estamos usando el papel para representar el tiempo: el de la izquierda significa el tiempo que **Aquiles** lleva corriendo tras la **Tortuga**,



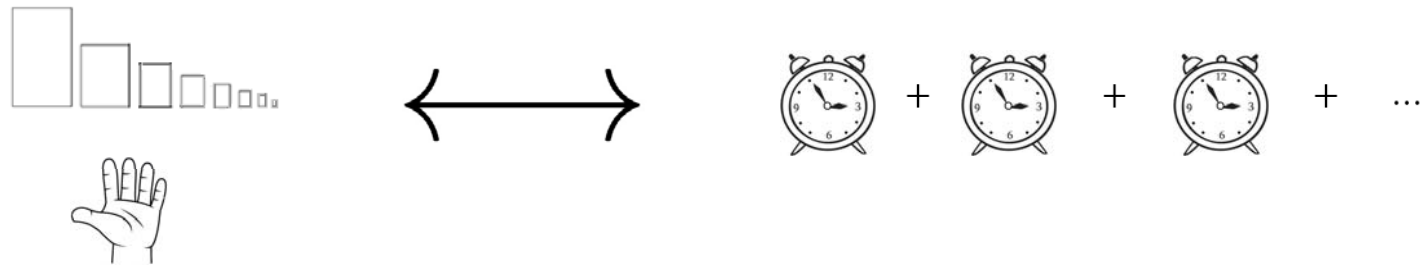
y cada **cuartilla** equivalía a **un cuarto de hora**.



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.104)

Pero no olvidemos que estamos usando el papel para representar el tiempo: el de la izquierda significa el tiempo que **Aquiles** lleva corriendo tras la **Tortuga**,



y cada **cuartilla** equivalía a **un cuarto de hora**.

Por lo tanto...



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.105)

...lo que hemos demostrado es que la suma de las duraciones de todas las etapas que ha de superar **Aquiles** para alcanzar a la **Tortuga**



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.106)

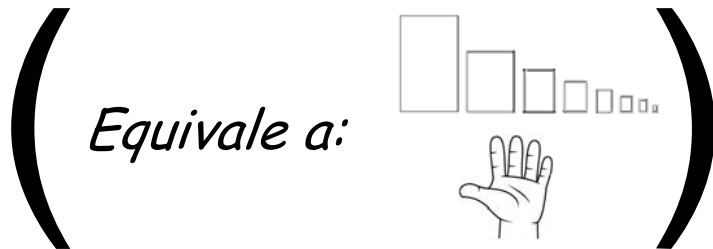
...lo que hemos demostrado es que la suma de las duraciones de todas las etapas que ha de superar **Aquiles** para alcanzar a la **Tortuga**



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.107)

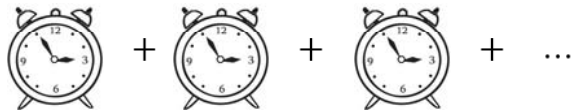
...lo que hemos demostrado es que la suma de las duraciones de todas las etapas que ha de superar **Aquiles** para alcanzar a la **Tortuga**



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.108)

...lo que hemos demostrado es que la suma de las duraciones de todas las etapas que ha de superar **Aquiles** para alcanzar a la **Tortuga**



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.109)

...lo que hemos demostrado es que la suma de las duraciones de todas las etapas que ha de superar **Aquiles** para alcanzar a la **Tortuga** ha de ser, necesariamente, menor que “dos cuartillas”, o sea: 15 min. + 15. min. = 30 minutos.



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.110)

...lo que hemos demostrado es que la suma de las duraciones de todas las etapas que ha de superar **Aquiles** para alcanzar a la **Tortuga** ha de ser, necesariamente, menor que “dos cuartillas”, o sea: 15 min. + 15. min. = 30 minutos.

$$\text{🕒} + \text{🕒} + \text{🕒} + \dots < 30 \text{ minutos.}$$



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.111)

...lo que hemos demostrado es que la suma de las duraciones de todas las etapas que ha de superar **Aquiles** para alcanzar a la **Tortuga** ha de ser, necesariamente, menor que “dos cuartillas”, o sea: 15 min. + 15. min. = 30 minutos.

$$\text{🕒} + \text{🕒} + \text{🕒} + \dots < 30 \text{ minutos.}$$

(Equivale a:) 😊

4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.112)

...lo que hemos demostrado es que la suma de las duraciones de todas las etapas que ha de superar **Aquiles** para alcanzar a la **Tortuga** ha de ser, necesariamente, menor que “dos cuartillas”, o sea: 15 min. + 15. min. = 30 minutos.

$$\text{🕒} + \text{🕒} + \text{🕒} + \dots < 30 \text{ minutos.}$$



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.113)

...lo que hemos demostrado es que la suma de las duraciones de todas las etapas que ha de superar **Aquiles** para alcanzar a la **Tortuga** ha de ser, necesariamente, menor que “dos cuartillas”, o sea: 15 min. + 15. min. = 30 minutos.

$$\text{🕒} + \text{🕒} + \text{🕒} + \dots < 30 \text{ minutos.}$$

Lo cual quiere decir que, como mucho en media hora, **Aquiles** sí alcanzará a la **Tortuga**.



✓ 4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.114)

...lo que hemos demostrado es que la suma de las duraciones de todas las etapas que ha de superar **Aquiles** para alcanzar a la **Tortuga** ha de ser, necesariamente, menor que “dos cuartillas”, o sea: 15 min. + 15. min. = 30 minutos.

$$\text{🕒} + \text{🕒} + \text{🕒} + \dots < 30 \text{ minutos.}$$

Lo cual quiere decir que, como mucho en media hora, **Aquiles** sí alcanzará a la **Tortuga**.



4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.115)

Para acabar, una **reflexión**:

4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.116)

Para acabar, una **reflexión**:

Hemos sido capaces de demostrar que **Aquiles** gana la carrera porque hemos demostrado, mediante el método de los papelitos, que **la suma de una cantidad infinita de números positivos no siempre da como resultado infinito.**

4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.117)

Para acabar, una **reflexión**:

Hemos sido capaces de demostrar que **Aquiles** gana la carrera porque hemos demostrado, mediante el método de los papelitos, que **la suma de una cantidad infinita de números positivos no siempre da como resultado infinito.**

Este hecho, importantísimo en el mundo de las matemáticas (así como en el de sus aplicaciones), se basa en algo muy sutil:

4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.118)



Si añadimos incesantemente nuevos términos a una suma, pero éstos son cada vez más pequeños, pasa muy a menudo que la suma “se estabiliza”

4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.119)



Si añadimos incesantemente nuevos términos a una suma, pero éstos son cada vez más pequeños, pasa muy a menudo que la suma “se estabiliza”, y llega un punto en el que, por más que sigamos eternamente sumando, lo que añadimos es tan pequeño que resulta inapreciable.

4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.120)



Si añadimos incesantemente nuevos términos a una suma, pero éstos son cada vez más pequeños, pasa muy a menudo que la suma “se estabiliza”, y llega un punto en el que, por más que sigamos eternamente sumando, lo que añadimos es tan pequeño que resulta inapreciable.

Este proceso se llama “convergencia”, y es lo que ha permitido a **Aquiles**, en nuestro problema, alcanzar a la **Tortuga**.

4. SOLUCIÓN: Aquiles gana

(p.121)



5. Ampliación: la serie geométrica

(p.122)

La suma de infinitos términos que hemos analizado al tratar el problema de **Aquiles** no es más que un caso particular de lo que se conoce en matemáticas como la “**serie geométrica**”.

Esta serie se construye a partir de un “**término inicial**”, al que designaremos con la letra a , al cual se van sumando los resultados de multiplicarlo sucesivamente por un segundo número, al que designaremos como r , y que suele recibir el nombre de “**razón**”.

5. Ampliación: la serie geométrica

(p.123)

Por lo tanto, podemos escribir la serie geométrica mediante la siguiente expresión:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

En el problema de **Aquiles** y la **Tortuga**, es muy fácil ver que los valores del primer término (si medimos el tiempo en “cuartos de hora”) y de la razón eran

$$a = 1 \qquad r = \frac{1}{2}$$

5. Ampliación: la serie geométrica

(p.124)

y por eso podríamos escribir la serie correspondiente como la siguiente suma infinita:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots;$$

o lo que es lo mismo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots.$$

Cuando el valor absoluto de r es menor que uno, la serie geométrica siempre es **convergente**, o sea: se puede sumar.

5. Ampliación: la serie geométrica

(p.125)

(Estrictamente, lo correcto sería decir que “existe su **límite** y éste es un número”; pero nosotros llamaremos al cálculo del límite “sumar la serie”, sencillamente).

Para otros r , la suma de la serie en ocasiones vale infinito y otras veces no está definida.

Ésta es la **fórmula** que permite sumar la serie cuando es convergente:

$$S = \frac{a}{1 - r}.$$

5. Ampliación: la serie geométrica

(p.126)

Propuestas de trabajo:

1. Suma la serie del problema de **Aquiles** con la fórmula de la diapositiva anterior. ¿Por qué sabemos que la serie es convergente? Recuerda que tienes que interpretar el resultado en términos de “cuartos de hora”, no de minutos.
2. Suma la serie para $a = 2$, $r = 1/3$. Usa la fórmula.
Intenta, luego, sumar los primeros 8 ó 9 términos de la serie con la calculadora. ¿Qué observas?

5. Ampliación: la serie geométrica

(p.127)

3. ¿Converge la serie para los valores $a = 1$, $r = 3/2$?

Suma los primeros términos de la serie con la calculadora. ¿Qué observas?

4. ¿Converge la serie para los valores $a = 1$, $r = -3/2$?

Suma los primeros términos de la serie con la calculadora. Compara con lo que has hecho en el ejercicio anterior. ¿Hay algo que te llame la atención?