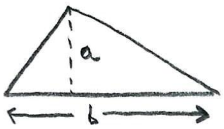
MATEMÀTIQUES (2n ESO)

T5 "Àlgebra": RESUM

1 EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES. COM CAL SUBSTITUIR lletra → nombre.

▶ La fórmula de l'àrea d'un triangle pot servir d'exemple d'expressió algebraica: $A = \boxed{\dfrac{b \cdot a}{2}}$ → «una expressió algebraica és una expressió matemàtica que inclou operacions entre lletres i números»



▶ SIGNIFICAT de les lletres: representen números que encara no ens han dit o encara no sabem. A l'exemple del triangle, no podem fer el càlcul de l'àrea fins que no ens diguin quant valen la base (b) i l'altura (a).

✎: «Les lletres d'una expressió algebraica es diuen variables»

▶ SUBSTITUCIÓ lletra → nombre:

Quan ja ens diuen el valor de les variables, podem fer el càlcul que indica l'expressió algebraica substituint $\boxed{\text{lletra} \rightarrow \text{nombre}}$.

• Exemple 1: Si l'expressió és: x^3+5 i ens demanen calcular el seu valor si $x=4$ ⇒

SUBSTITUCIÓ:	CÀLCUL:	RESULTAT:
$4^3 + 5 =$	$64+5 =$	69

• Exemple 2: Si l'expressió és: x^3+5 i ens demanen calcular el seu valor si $x=-2$ ⇒ $(-2)^3 + 5 = -8 + 5 = -3$

✎
• Si el valor té signe ⊖, en substituir cal "protegir-lo" amb un parèntesi!
• Recordem el signe del resultat d'una potència:

$(\oplus)^n = \oplus$ SEMPRE → p. ex.: $2^2=4$; $2^3=8$

$(\ominus)^n = \begin{cases} (\ominus)^{\text{parell}} = \oplus & \rightarrow \text{p. ex.: } (-2)^2 = 4 \\ (\ominus)^{\text{senar}} = \ominus & \rightarrow \text{p. ex.: } (-2)^3 = -8 \end{cases}$

▶ MÈTODE de la SUBSTITUCIÓ per a fer COMPROVACIONS:

Dues expressions algebraiques són equivalents, per exemple $3x+2x$ és equivalent a $5x$ i s'escriu $3x+2x=5x$, si substituint x per tots els valors possibles ens dóna el mateix $3x+2x$ que $5x$.
Així comprovem que per exemple, x^2+x i x^3 NO són equivalents!
(Per exemple, si substituïm $x=1 \rightarrow x^2+x = 1^2+1 = 1+1 = \boxed{2}$, però: $x^3 = 1^3 = \boxed{1}$)

2 MONOMIS.

«Una expressió algebraica que consisteix en lletres i números multiplicats entre si es diu <u>monomi</u>» Les lletres poden tenir exponents, i de vegades hi ha un signe davant.

$\boxed{-4x^5}$

Exemples: $-2x^3$, $5ab$, x^3, 5, xy^2, $-x$, -1, $6x^7$...

<u>part literal</u>: la part amb lletres (i exponents) ← les lletres s'anomenen <u>variables</u> (són números no fixats: poden variar).

<u>coeficient</u>: el número (amb el signe, si n'hi ha)

- <u>grau d'un monomi</u>: «la suma de tots els exponents que hi ha a la seva part literal» → <u>p.ex.</u>: $7x^2$, grau 2; a^2b^3, grau 5; $2x$, grau 1; -7, grau zero; etc.
- <u>monomis semblants</u>: «dos monomis són "semblants" si tenen la mateixa part literal» → <u>p.ex.</u>: $2ab$ i $3ab$; $-4x^5$ i $6x^5$; etc.
- <u>monomis oposats</u>: «dos monomis són "oposats" si són semblants i, a més a més, tenen coeficients oposats» → <u>p.ex.</u>: $5ab$ i $-5ab$; 6 i -6; x^4 i $-x^4$; etc.

▶ MULTIPLICACIÓ de MONOMIS:

1r signe · signe
2n número · número
3r lletres · lletres

▶ DIVISIÓ de MONOMIS:

1r signe : signe
2n número : número
3r lletres : lletres

RECORDEM:

$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

$x^n : x^m = x^{n-m}$

$x^0 = 1$

$(-4x^7)\cdot(-2x^3) = +8x^{10}$ ← exemples → $(-4x^7):(-2x^3) = +2x^4$

RECORDEM:

- sempre escrivim els monomis en aquest <u>ordre</u>: $\boxed{\text{signe, número, lletres}}$
- ho fem <u>sense parèntesi</u> i utilitzant <u>exponents</u> per a no repetir lletres.

→ <u>p.ex.</u>: $3\cdot(-2)\cdot xy = -6xy$
$3a\cdot(-b) = -3ab$
$4\cdot a\cdot a\cdot b\cdot a\cdot b = 4a^3b^2$

- <u>evitem</u> escriure coses com: $1\cdot a$ → millor: a
  o coses com: $6\cdot b^0$ → millor: 6

▶ SUMA de MONOMIS SEMBLANTS (SIMPLIFICACIÓ o REDUCCIÓ):

La <u>suma</u> de dos <u>monomis semblants</u> es pot escriure com un únic monomi ("simplificar" o "reduir"), que tindrà «la mateixa part literal, i el coef. serà la suma de coeficients»:

$\boxed{5♩ + 3♪ - 2♩ + ♪ = 3♩ + 4♪}$

$6c + 4c = (6+4)\cdot c = 10c$

$5p - 2p = (5-2)\cdot p = 3p$

$6x^3 - 4x^3 = (6-4)\cdot x^3 = 2x^3$

$6x^3 - 4x^2$ ⟹ no es pot reduir !!

3 POLINOMIS.

«La suma (o resta) de monomis es diu polinomi, p.ex.: $4x^2 - 2x + 5$. Cadascun dels monomis (signe inclòs!) es diu "terme"». El grau d'un polinomi és el del seu terme de major grau.

La resta de monomis sempre es pot veure com sumar el monomi oposat: $6x^3 - 2x = (6x^3) + (-2x)$

Exemples: $6ab - 2a + 3b$; $5x^7 - 4x^3 + x - 1$; $4x^5 - 1$; $2x^4$; $x + 1$; $2xy + x^2 - 4y^5$ ...

▶ SUMA i RESTA de POLINOMIS:

1r Traiem els parèntesis [si hi ha un signe menys davant, canvia el signe de cada terme]

2n simplifiquem els monomis semblants

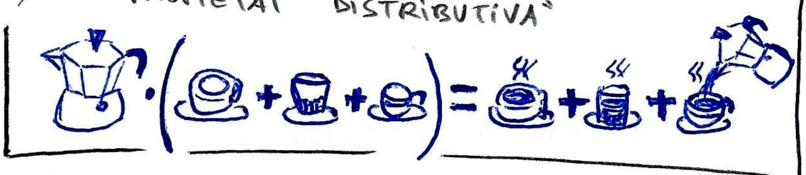
Exemples:

$(3x^2+x)+(2x^2-x) =$

$= 3x^2 + x + 2x^2 - x = 5x^2$; $(2x^3+x^2-6)-(x^3+5x^2) = 2x^3 + x^2 - 6 - x^3 - 5x^2 =$

$= x^3 - 4x^2 - 6$; $-(a+b)+(3a+4b) = -a-b+3a+4b = 2a+3b$; etc.

▶ MULTIPLICACIÓ monomi × polinomi, o "PROPIETAT DISTRIBUTIVA"



El monomi va multiplicant, un per un, tots els termes del polinomi:

$$-6x^2 \cdot (4x^3 - x^2 + 5) = -24x^5 + 6x^4 - 30x^2$$

el resultat és un altre polinomi

▶ DIVISIÓ polinomi : monomi

→ semblant a la multiplicació: el monomi va dividint tots els termes del polinomi: $(6x^5 - 3x^4 + 12x^3) : (-3x^3) = -2x^2 + x - 4$

▶ MULTIPLICACIÓ polinomi × polinomi

(♂ + ♂)·(♀ + ♀) = ♂♀ + ♂♀ + ♂♀ + ♂♀

1r multipliquem cada terme del 1r polinomi per tots el termes del 2n.

2n simplifiquem els monomis semblants.

Exemples:

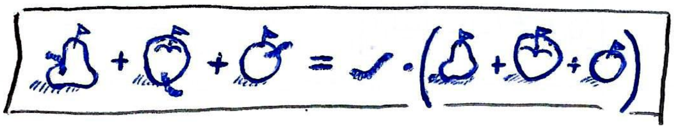
$(3a+2b)\cdot(a+b) = 3a^2 + \underbrace{3ab + 2ba} + 2b^2 = 3a^2 + 5ab + 2b^2$

$(2x^3 - x)\cdot(7x + 4x^4) = 14x^4 + 8x^7 - 7x^2 - 4x^5$

$(a+1)\cdot(3a+b-2) = 3a^2 + ab \underbrace{-2a + 3a} + b - 2 = 3a^2 + ab + a + b - 2$

4 EXTRACCIÓ de FACTOR COMÚ

(o "factorització d'un polinomi")



Es pot veure com "passar la pel·lícula" de la propietat distributiva marxa enrere:

1r El coef. del F. COMÚ és el MCD dels coefs. (sense signe) dels termes del POLINOMI INICIAL.

2n La part literal del F. COMÚ té les lletres repetides amb els menors exponents.

3r El que queda entre parèntesi és el resultat de dividir el POLIN. INICIAL entre el FACTOR COMÚ.

FACTOR COMÚ

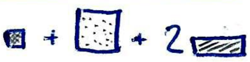
$$\underbrace{8x^5-2x^3+4x^2}_{\text{POLINOMI INICIAL}} = 2x^2\cdot(4x^3-x+2)$$

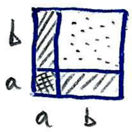
$: 2x^2$

5 IDENTITATS NOTABLES:

són molt útils en àlgebra, i les sabem de memòria. Totes es poden demostrar amb el mètode de multiplicació POLIN. x POLIN., però la del quadrat de la suma la podem recordar molt fàcilment amb un raonament geomètric:

▶ SUMA al QUADRAT: $\boxed{(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab}$





«Suma al quadrat: igual al quadrat del primer més el quadrat del segon més el doble del primer pel segon»

▶ DIFERÈNCIA al QUADRAT: $\boxed{(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab}$ «(etc.) ... menys el doble del primer pel segon»

▶ SUMA per DIFERÈNCIA: $\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2}$

«Suma per diferència: igual a la diferència dels quadrats»

6 OPERACIONS COMBINADES amb MONOMIS i POLINOMIS:

- Les multiplicacions i divisions es fan abans que les sumes i restes.
- Al final, cal simplificar (si hi ha monomis semblants els hem de sumar).

EXEMPLES:

$$18xy^2 - 8xy^2 = 10xy^2;$$

$$x\cdot(5x^2+x-2)+x^2 = 5x^3\underbrace{+x^2}-2x\underbrace{+x^2} = 5x^3+2x^2-2x;$$

$$(x^3-x^2+x):x+(x^2+x+1) = \underbrace{x^2}\cancel{-x}\underbrace{+1}\underbrace{+x^2}\cancel{+x}\underbrace{+1} = 2x^2+2;$$

$$(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1) = (x^2+\underbrace{2x+3x}_{5x}+6)\cdot(x+1) = x^3+\underbrace{x^2+5x^2}_{6x^2}+\underbrace{5x+6x}_{11x}+6 = x^3+6x^2+11x+6$$