'LAHURA'15

《2n - SIMULACRE D'EXAMEN》

[dc; 9-10-15]

pàg. 23, #4; pàg. 28, #13; pàg. 41, #8

[$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$]

4 p. 23 ← [al llibre també està resolt].

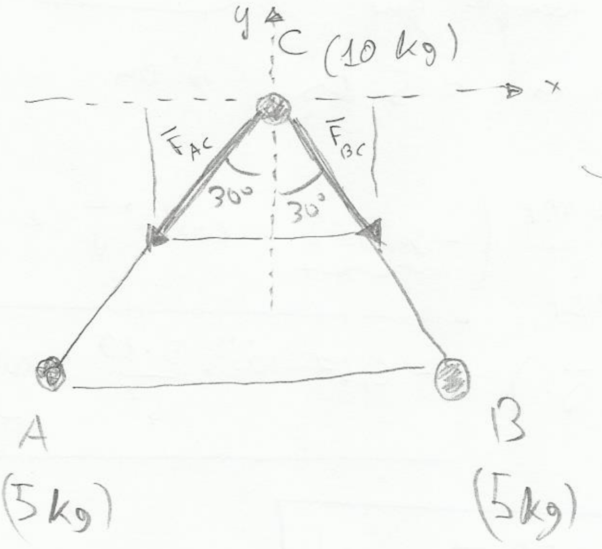
Sigui triangle equilàter costat = 6 m; als dos vèrtexs inferiors hi ha cossos de 5 kg de massa. Al vèrtex superior, n'hi ha un de 10 kg.

Calculeu la força que exerceixen els dos de baix sobre el de dalt.

NOTA:

i) es refereix a la força total exercida pels de baix sobre el de dalt.

ii) una força és un vector: amb direcció i sentit (no només mòdul). Compte a donar el mòdul si ens demanen un vector, i viceversa.



→ Per simetria es veu que les components horitzontals de $\vec{F}_{AC}$ i $\vec{F}_{BC}$ es cancel·laran i només ens quedarà component vertical de la força resultant.

Però això, per a fer-ho a l'examen, s'ha de raonar clarament (!).

Apliquem la Llei de la Gravitació Universal:

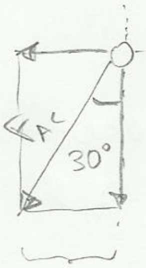
$$\boxed{\vec F_{AC} = -G\,\frac{m_A \cdot m_C}{d_{AC}^2}\,\vec u_{AC}} \quad (1)$$

($\vec F_{BC}$ és igual, canviant $A \to B$)

força gravitatòria que A crea sobre C,

sent-hi $\vec u_{AC}$ el vector unitari que mira des de A cap a C.

Calculem les dues components d' $\vec F_{AC}$:

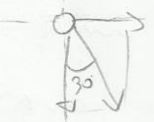


$(F_{AC})_y = -F_{AC}\cos 30°$

$(F_{AC})_x = -F_{AC}\,\text{sen}\,30°$

$$\Rightarrow \boxed{\vec F_{AC} = -F_{AC}\left(\text{sen}\,30°\,\vec i + \cos 30°\,\vec j\right)} \quad (2)$$

Anàlogament, per a $\vec F_{BC}$:



$$\Rightarrow \boxed{\vec F_{BC} = F_{BC}\left(\text{sen}\,30°\,\vec i - \cos 30°\,\vec j\right)} \quad (3)$$

Ara sumem, però tindrem en compte que

$d_{AC} = d_{BC} = 6$ m; $m_A = m_B = 5$ kg, d'on:

$$\boxed{\vec F_{TOT,C} = \vec F_{AC} + \vec F_{BC}} = G\,\frac{m_A\, m_C}{d_{AC}^2}\left(-\text{sen}\,30°\,\vec i - \cos 30°\,\vec j + \text{sen}\,30°\,\vec i - \cos 30°\,\vec j\right) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5\cdot 10}{6^2}\,2\,\underbrace{\cos 30°}_{\sqrt{3}/2}\,\vec j$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec F_{TOT,C} = -1{,}6\cdot 10^{-11}\,\vec j \text{ N}} \quad (4)$$

(vertical cap avall, com esperàvem)

dc; 9-10-13

pàg 23, #4; pàg 28, #13; pàg 41, #8

---

28 p. 28 ← Al llibre també està resolt; no copio amb detalls de l'enunciat ni les dades oferides.

→ És d'una prova real de selectivitat

SATURN → té una massa 95,2 vegades la de la Terra.

→ té un radi 9,5 vegades el de la Terra.

a) g_S / g_T ? valor de l'accel. de la grav. sobre la seva sup., relatiu a la de la Terra.

$$g_S = |\vec{g}_S \text{(superfície)}| = G \frac{M_{SAT}}{R^2_{SAT}}$$

$$g_T = |\vec{g}_T \text{(superfície)}| = G \frac{M_T}{R^2_T}$$

% ⇒

(5)

$$\Rightarrow \boxed{g_S / g_T} = \underbrace{\left(\frac{M_{SAT}}{M_T}\right)}_{= 95,2} \cdot \left(\frac{1}{\underbrace{R_{SAT}/R_T}_{= 9,5}}\right)^2 = 1,055$$

(adimensional)

b) Tità: satèl·lit de SATURN en òrbita circular, amb una distància entre els seus centres de:

(6) $r = 1\ 221\ 850$ km $= 1,221\ 850 \cdot 10^9$ m

Quin és el període de revolució de Tit. al voltant de SAT? (⟺ temps que "gira" 2π rad).

Com que és un MCU la força que actua (la gravitatòria, $\boxed{F_G = G\,\frac{M_{SAT}\cdot m_{TIT}}{r^2}}$ (7))

... és una "força centrípeta", $\boxed{F_c = m_{TIT}\,\underbrace{\frac{v^2}{r}}_{\text{acceleració centríp.}}}$ (8)

D'on [7] = [8]

$$\Rightarrow G\,\frac{M_{SAT}\cdot \cancel{m_{TIT}}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m_{TIT}}\,\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_{SAT}}{r}} \Rightarrow (*)$$

COMPTE!! De vegades us emboliqueu amb v i ω. Ara necessitem ω, per a calcular el període. TRUC: pensar en unitats:

$v \rightsquigarrow m/s$
$\omega \rightsquigarrow rad/s$ } → a qui hem de multiplicar pel r (metres!!) ⇒ a la ω, sinó no ens quedaria m/s:

$$\boxed{v = r\cdot\omega} \quad (9)$$

$$[*] \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{G M_{SAT}}{r}} = \sqrt{\frac{G M_{SAT}}{r^3}}} \quad (10)$$

[dc, 9-10-13] pàg. 23, #4; pàg. 28, #13; pàg. 41, #8

COMPTE!! ⇝ He vist que també teniu problemes amb el periode. És el temps T que triga en completar-se una volta,

~~periode~~ $\Delta\theta = 2\pi \Longrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ (11)

(eq. del MCU: $\theta = \theta_0 + \omega t$)

2 "trucs" (mnemotècnics):

→ 1/ ω és angle girat entre temps; en T, girem $2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

→ 2/ pensar, de bell nou, en unitats:

$T\,[s] = $?

$\frac{2\pi\,[rad]}{\omega\,[rad/s]} \rightarrow s$ SÍ ☺

$\frac{\omega\,[rad/s]}{2\pi\,[rad]} \rightarrow \frac{1}{s}$ NO ☹

Així doncs, [10] i [11] $\Rightarrow$ $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G M_{SAT}}}}$ (12) =

$= 1,377 \cdot 10^6$ s $= 15,94$ dies terrestres

c) $\frac{T_{SAT}^2}{r_{SAT}^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \Rightarrow T_{SAT} = \left(\frac{r_{SAT}}{r_T}\right)^{3/2} \underbrace{T_T}_{1\text{ any terrestre}} \Rightarrow$

(3a llei KEPLER)

$$\Rightarrow \boxed{T_{SAT} = \left(\frac{1,429\cdot 10^9}{1,496\cdot 10^8}\right)^{3/2} = 29,52 \text{ anys terrestres}}$$

8 pàg. 41 a) Calcula E_p d'un cos de 50 kg sobre la sup de la Terra i de la Lluna.

$$\begin{cases} E_{p,T} = -G\dfrac{M_T}{R_T}\cdot 50 = -3,14\cdot 10^9 \text{ J} \\ E_{p,L} = -G\dfrac{M_L}{R_L}\cdot 50 = -1,45\cdot 10^8 \text{ J} \end{cases}$$

b) & c) Quin treball fa el camp gravitatori quan l'objecte va des de sup. Lluna a sup. Terra o a l'inrevés?

CAMP GRAVIT.: conservatiu, calculem el seu treball amb menys l'increment d'E_p:

$$\boxed{W^{A\to B}_{\text{força grav}} = -\Delta E_p = -\left(\underbrace{E_p(B)}_{\text{fin}} - \underbrace{E_p(A)}_{\text{inic}}\right)}$$

Així doncs,

T→L: $W_{fg} = -(E_{p,L} - E_{p,T})$

L→T: $W_{fg} = -(E_{p,T} - E_{p,L})$

donen el mateix, però amb signe contrari

d) per què això? Quan $\boxed{W_{fg} > 0} \Leftrightarrow E_p$ decreix: com quan deixem caure una pedra: és un procés "espontani".

Si $\boxed{W_{fg} < 0} \Leftrightarrow E_p$ creix, i no és "espontani": la pedra no "puja sola" sense una $f_{ext.}$, o una E_{cin} inicial.