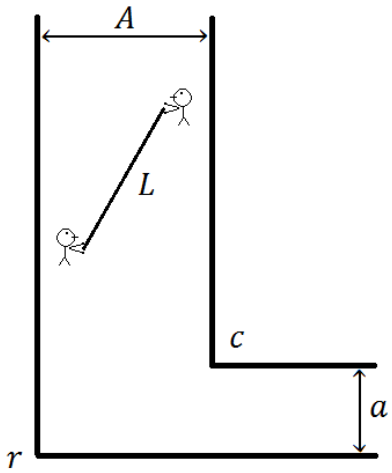
► ENUNCIAT:

Sigui un carreró 1, d'amplada *A*, que gira a l'esquerra i connecta amb un altre carreró, que en direm 2, que és perpendicular al primer i té amplada *a*.

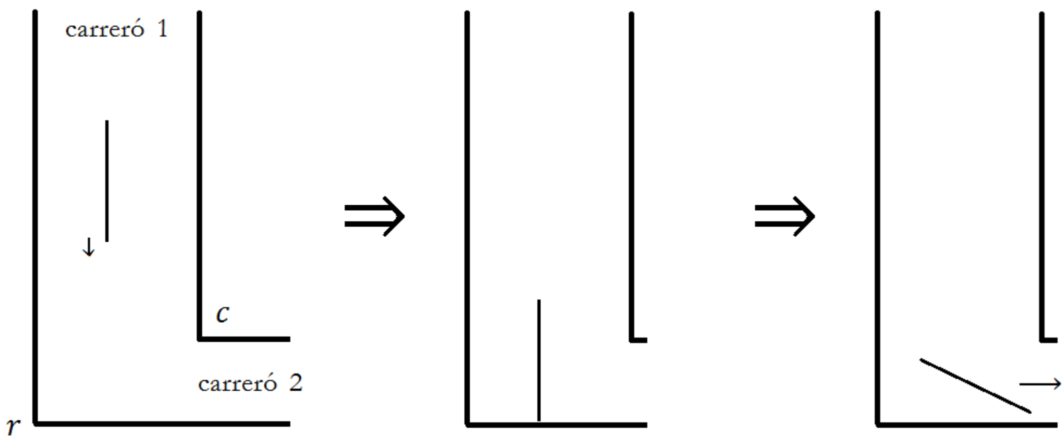
Dos transportistes porten un vidre de longitud *L* pel primer carreró.



¿Quina és la longitud màxima d'*L* que permet als transportistes fer la cantonada?

► RESOLUCIÓ:

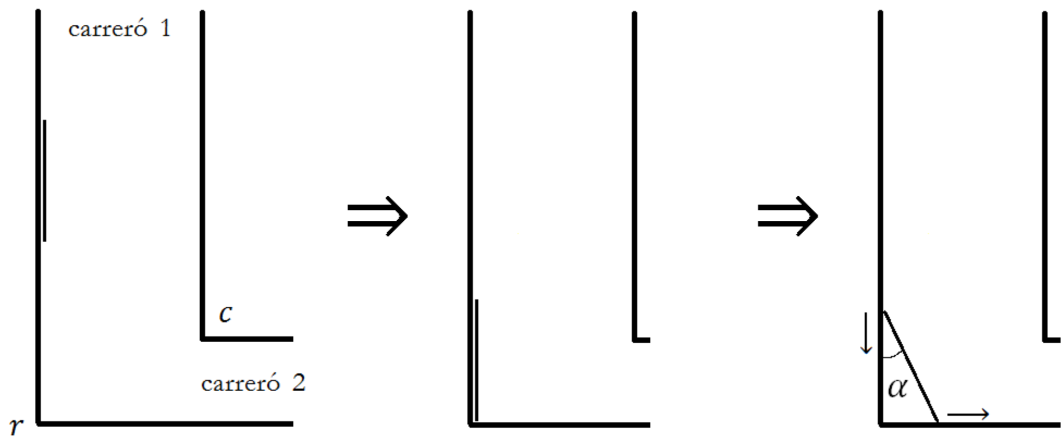
És evident que si fiquem el vidre paral·lel a la paret d'un carrer, per molt llarg que sigui no hi ha cap problema en dur-lo per tal carrer. Imaginem, doncs, que el portem així pel nostre carreró 1, i en arribar a la cantonada veiem que no hi cap, perquè (posem per cas) $L < a$. Què hi fem? Mirem d'inclinar-lo una mica fins que hi entri:



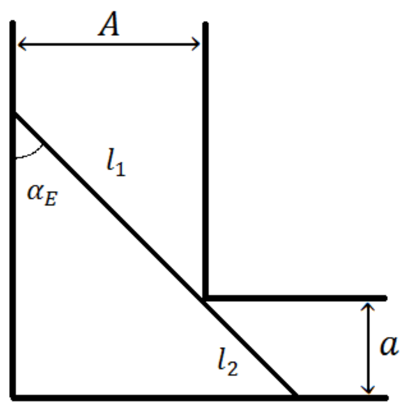
Per a fer aquesta maniobra, però, necessitem un poc d'espai. Si el vidre és massa llarg, és possible que arribi un moment en què per un extrem toquem una paret del carreró 1, per l'altre en toquem una de 2, i en un punt central el vidre toqui el cantó *c*. És ha dir: el vidre haurà quedat encaixat.

Aleshores, el que ens estem plantejant és quina és la llargada màxima del vidre que permet fer la maniobra sense encaixar-se.

Per a trobar aquest valor, anem a imaginar que fem el següent: avancem pel carrer 1 pegats a la paret dreta, i en arribar al racó *r* comencem a seguir la paret de 2 amb un extrem del vidre, mentre que l'altre roman tota l'estona pegat a la paret d'1. És a dir, anem "obrint l'angle" que el vidre forma amb la paret dreta d'1:



Així evitem al màxim el cantó *c*. A aquest angle li direm α. Aleshores, el nostre vidre es quedarà encaixat si existeix un angle $\alpha = \alpha_E$ per al qual la configuració sigui:

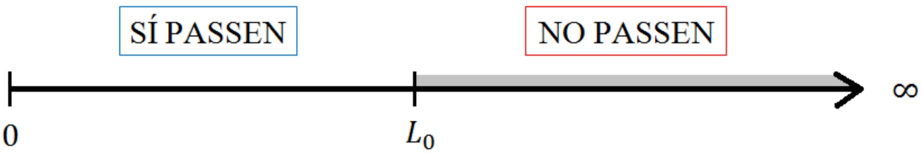


$$\left.\begin{array}{l} l_1 \sin\alpha_E = A \\ l_2 \cos\alpha_E = a \end{array}\right\} \quad l_1 + l_2 = L \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{L = \frac{A}{\sin\alpha_E} + \frac{a}{\cos\alpha_E}} \qquad (1)$$

La darrera equació (1) ens diu quina longitud L té un vidre que en el procés d'anar obrint l'angle α es queda encaixat en $\alpha = \alpha_E$.

Per a veure amb claredat com resoldre el problema, anem a imaginar totes les longituds possibles del nostre vidre. És evident que hi ha L de dos tipus: les corresponents als vidres que no podran passar la cantonada, i per tant existeix un $\alpha = \alpha_E$ per al qual s'encaixaran (i que verifica l'equació 1), i els que sí que la podran passar, i per tant no hi ha cap $\alpha = \alpha_E$ en que s'encaixin.



El valor "frontera", $L = L_0$, és la longitud més petita per a la qual existeix un α_E amb que es verifica (1); és a dir: és un mínim de la funció $L(\alpha_E)$.

Al mateix temps, podem dir que totes les longituds més petites que L_0 passen, i per tant L_0 és la longitud màxima que ens demana l'enunciat. (Nota: la discussió de sí per a exactament $L = L_0$ el vidre passa o no passa, la deixem per a una mica més endavant).

Trobem, doncs, el mínim de la funció $L(\alpha_E) = \frac{A}{\sin \alpha_E} + \frac{a}{\cos \alpha_E}$:

$$L'(\alpha_E) = -\frac{A}{\sin^2 \alpha_E} \cos \alpha_E + \frac{a}{\cos^2 \alpha_E} \sin \alpha_E = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A\frac{c}{s^2} = a\frac{s}{c^2} \quad \Rightarrow \quad Ac^3 = as^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{a} = \left(\frac{\sin \alpha_E}{\cos \alpha_E}\right)^3 = \operatorname{tg}^3 \alpha_E \quad \Rightarrow$$

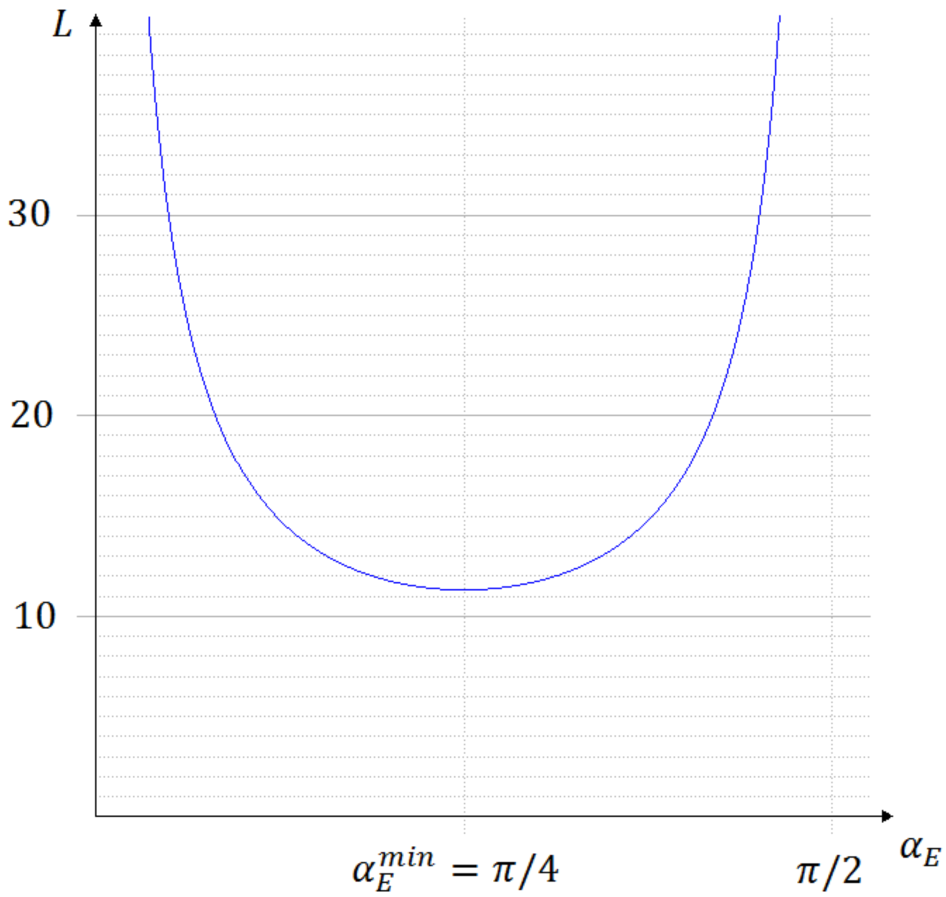
$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_E^{min} = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{A/a}} \,;$$

i per tant, fent $L_0 = L(\alpha_E^{min})$ trobem:

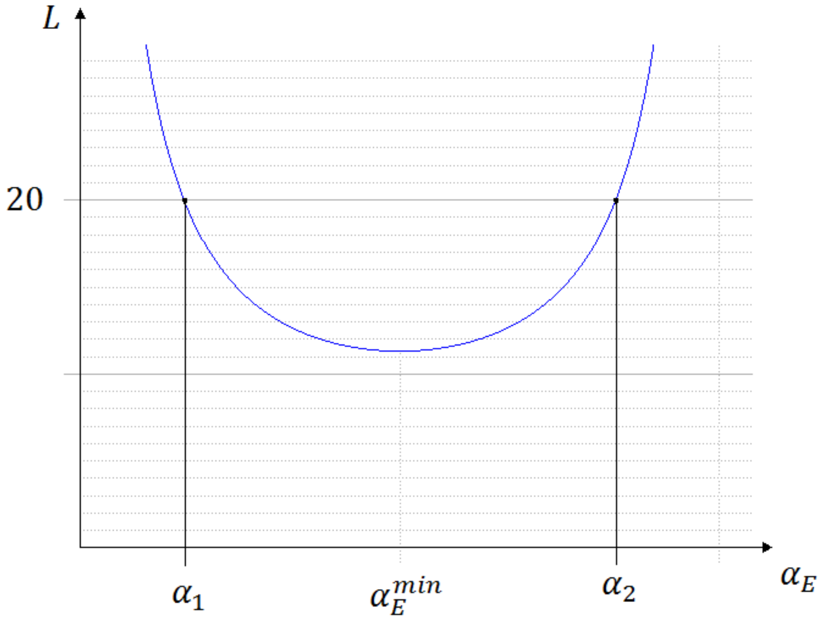
$$\boxed{L_0 = \frac{A}{\sin\left(\operatorname{arctg} \sqrt[3]{A/a}\right)} + \frac{a}{\cos\left(\operatorname{arctg} \sqrt[3]{A/a}\right)}} \,.$$

¿Segur que aquest valor és un mínim de la funció $L(\alpha_E)$? El domini d'aquesta funció és $D =]0,\ \pi/2[$, i té una asímptota vertical a l'esquerra (doncs quan $\alpha_E \to 0^+$, $\sin \alpha_E \to 0^+$, i per tant $L \to +\infty$) i una altra a la dreta (doncs quan $\alpha_E \to \pi/2^-$, $\cos \alpha_E \to 0^+$, i per tant $L \to +\infty$). Com que, a més a més, la funció és contínua en aquest domini, si "baixa" des de més infinit a l'esquerra i "puja" cap a més infinit a la dreta, per força haurà de tenir-hi al menys un mínim pel camí. Atès que el punt $\alpha_E^{min} = \text{arctg}\sqrt[3]{A/a}$ que abans hem trobat era l'única solució en *D* de l'equació $L'(\alpha_E) = 0$ (que ens dóna els punts estacionaris de la funció; és a dir, els únics que poden ser extrems), llavors aquest valor és necessàriament un mínim. ■

Examinem ara, finalment, la qüestió que abans hem deixat pendent: efectivament, si $L < L_0$, sabem que el vidre passa, i si $L > L_0$ sabem que no passa. Què ocorre per a $L = L_0$? Per a entendre-ho millor, anem a fer la gràfica de la funció $L = L(\alpha_E)$:



Hem donat els valors $A = a = 4$ m a les amplades dels carrers, amb la qual cosa trobem que $\alpha_E^{min} = 45°$ i $L_0 = 8\sqrt{2} = 11{,}31$ m. Si tinguéssim un vidre de longitud més gran que L_0, per exemple $L = 20$ m, hi hauria dos valors dels angles per als que el vidre s'encaixaria: un més petit que α_E^{min} i un altre més gran:



La interpretació d'això és la següent: el petit, α_1, és per al qual el vidre s'encaixaria si vinguéssim pel carrer 1, com demana l'enunciat; el gran, α_2, és per al que s'encaixaria si vinguéssim pel carrer 2. Que amb aquest vidre vertaderament no podríem passar ho sabem perquè si vinguéssim pel carrer 1 apegats a la paret de la dreta (com hem dit al principi), i anéssim obrint l'angle α per a fer la cantonada, en arribar a $\alpha = \alpha_1$ ens "encaixaríem", i si seguíssim obrint, el cantó c trencaria el vidre, perquè entre $\alpha = \alpha_1$ i $\alpha = \alpha_2$ ni tan sols la configuració "encaixat" és possible per a aquesta longitud[1]. En el cas $L = L_0$, però, quan obrim α i arribem a $\alpha = \alpha_E^{min}$, sí que són possibles les configuracions amb $\alpha > \alpha_E^{min}$ sense que el cantó travessi el vidre. Per tant, en termes estrictament matemàtics, amb $L = L_0$ sí que podem fer la cantonada, perquè quan arribem a $\alpha = \alpha_E^{min}$ el cantó c toca el vidre, però si seguim obrint l'angle, deixa de tocar-lo: es tracta, doncs, d'un "fals encaix".

En la pràctica, però, el més prudent seria agafar un vidre que com a molt gran fos una mica més petit que L_0.

---

[1] Això és veu bé amb l'esquema del vidre encaixat del final de la pàgina 2. Si tractem de dibuixar-hi un altre vidre un poc més llarg i amb el mateix angle, veurem que l'única possibilitat és que travessi el cantó.