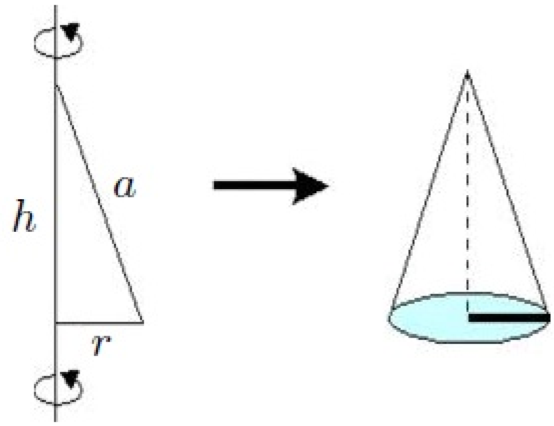
► ENUNCIAT: Sigui un con generat fent girar un triangle rectangle de perímetre 10 cm al voltant d'un eix que conté un dels catets. ¿Quines dimensions ha de tenir el triangle per a que el volum del con sigui màxim?



► SOLUCIÓ: podem escriure les següents tres equacions:

$$\text{perímetre} = h + a + r = 10 \text{ cm} \tag{1}$$

$$\text{Tma. Pita: } a^2 = h^2 + r^2 \tag{2}$$

$$V_{CON} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h \tag{3}$$

Hem d'expressar V_{CON} en funció d'un únic paràmetre (h, a ó r). Com que tenim un sistema de tres equacions, en principi hem de poder fer-ho:

$$[1] \quad \Rightarrow \quad a = 10 - (h + r) \quad \Rightarrow \quad a^2 = 10^2 + (h + r)^2 - 20(h + r) \quad (*)$$

Igualem [*] i [2]:

$$h^2 + r^2 = 10^2 + h^2 + r^2 + 2hr - 20h - 20r \quad \Rightarrow$$

$$10^2 - 20r = h(20 - 2r) \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{10^2 - 20r}{20 - 2r} = \frac{50 - 10r}{10 - r}} \tag{4}$$

Amb això substituïm en [3] i tenim:

$$\boxed{V_{CON} = \frac{\pi}{3} \frac{50r^2 - 10r^3}{10 - r}} \tag{5}$$

Ara derivem per a buscar $V^{màx}$:

$$V' = \frac{\pi}{3} \frac{(100r - 30r^2) \cdot (10 - r) + 1 \cdot (50r^2 - 10r^3)}{(10 - r)^2} = \frac{\pi}{3} \frac{10r(2r^2 - 35r + 100)}{(10 - r)^2}$$

Fem $V' = 0$ i eliminem el pi terços, el denominador de la fracció gran i el deu que multiplica en el seu numerador, quedant-ne:

$$0 = r(2r^2 - 35r + 100)$$

En aquesta equació $r = 0$ és solució, però no ens interessa perquè vol dir que no hi ha con. Llavors solucionem l'equació de segon grau

$$2r^2 - 35r + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = 3,596 \text{ cm}},$$

on hem rebutjat la solució d'$r = 13,90$ cm perquè significaria un catet més gran que el perímetre del triangle, i això no té sentit. Trobem les dimensions del triangle amb l'equació [4] i el teorema de Pitàgores [2]: $h = 2,192$ cm i $a = 4,212$ cm. El volum màxim serà, amb [3], $V^{màx} = 29,69$ cm^3.

Comprovem que és un veritable màxim veient el signe de la derivada una mica abans i una mica després d' $r = 3,60$:

$$V'\left(r = 3,5\right) = \frac{\pi}{3} \frac{10 \cdot 3,5 \cdot \left[2(3,5)^2 - 35 \cdot 3,5 + 100\right]}{\left(10 - 3,5\right)^2} > 0$$

(no cal fer el càlcul sencer: veient que el claudàtor dóna 2, com que va multiplicat i dividit per coses positives ja sabem que el resultat és positiu);

$$V'\left(r = 3,7\right) = \frac{\pi}{3} \frac{10 \cdot 3,7 \cdot \left[2(3,7)^2 - 35 \cdot 3,7 + 100\right]}{\left(10 - 3,7\right)^2} < 0$$

(no cal fer el càlcul sencer: veient que el claudàtor dóna $-2'12$, com que va multiplicat i dividit per coses positives ja sabem que el resultat és negatiu).

Concloem, doncs, que sí que és màxim ■