Pepe Ródenas Borja
[dg; 15 - III - 15]

Física (2º Bach.)

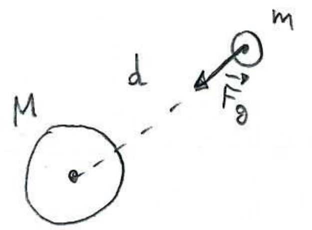
Tema 3 "Campo gravitatorio" (resumen)

1/3

3 Campo Gravitatorio

3.1 Ley de la gravitación universal. Aplicaciones básicas.

3.1.1 Conceptos básicos



$$\boxed{F_g = G\frac{Mm}{d^2}}$$

«Ley de la **gravitación universal**»

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot kg^{-2} \cdot m^2$

• **Energías:**

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (J)$$
$$E_p = -G\frac{Mm}{d} \quad (J)$$
$$E_{TOTAL} = E_c + E_p \quad (J)$$

constante dentro de la misma órbita. (NOTA: a veces escribiremos E, a secas; también: E_M).

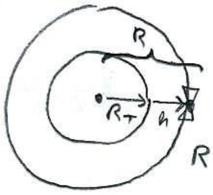
• **"Aceleración de la gravedad"**: a distancia d de su centro, M crea un "campo gravitatorio" de módulo: $\boxed{g(d) = G\frac{M}{d^2}}$ [S.I.: $m/s^2 = N/kg$]

Es el módulo de la aceleración que siente en ese punto una masa cualquiera m, y por eso se llama también "aceleración de la gravedad". En la superficie de un planeta de radio R_p: $g_{sup} = G\frac{M}{R_p^2}$.

3.1.2.- Órbitas circulares

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

"velocidad orbital"



$$\boxed{\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}} \Rightarrow \frac{R^3_{Tierra}}{T^2_{Tierra}} = \frac{R^3_{Júpiter}}{T^2_{Júpiter}}$$

"3ª ley **Kepler**"

$$\boxed{E_{TOTAL} = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{R}} = -E_c = \frac{1}{2} E_p$$

"energía orbital"

Movimiento Circular Uniforme: (MCU)

T: periodo (s) ← tiempo una vuelta

ω: velocidad angular (rad / s)

$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ ← radianes avanzados en una vuelta

espacio recorrido en una vuelta

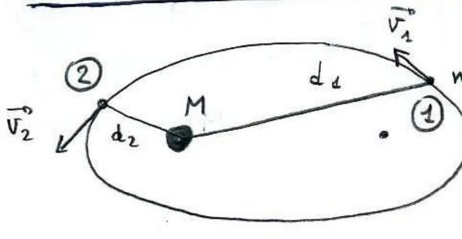
$\boxed{v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R}$ v: velocidad lineal (m/s)

2ª ley Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$

fuerza total (o "resultante")

En el MCU, la $\vec{a}$ se llama "centrípeta" o "normal", y su módulo vale: $\boxed{a_N = \frac{v^2}{R}}$

3.1.3.- ÓRBITAS ELÍPTICAS



: M ocupa uno de los focos de la elipse. Los valores de v y d cambian a lo largo de la trayectoria, y también E_c, E_p; pero $E = E_c + E_p$ (la TOTAL) siempre vale lo mismo:

$\boxed{E(1) = E(2)}$ (Conservación de la E).

d_1	d_2
v_1	v_2

⇝ si sólo tenemos 3 de estas cantidades, con esta ecuación de conservación podemos hallar la que falta.

3.2 ENERGÍA. INTERPRETACIÓN Y CONSERVACIÓN

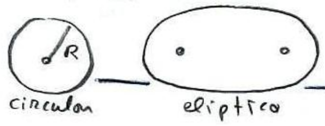
3.2.1.- SIGNO de la ENERGÍA. ESCAPE

$$\begin{cases} E_c > 0 & \text{siempre } \oplus \\ E_p < 0 & \text{siempre } \ominus \\ E = E_c + E_p \end{cases} \Longrightarrow \text{signo de } E:$$

« Interpretación del SIGNO de la ENERGÍA »

- $\oplus$ si "gana" E_c ⇝ ÓRBITA ABIERTA

- $\boxed{E=0}$: ENERGÍA MÍNIMA de ESCAPE
- $\ominus$ si "gana" E_p ⇝ ÓRBITAS CERRADAS (no escapa)



• **PROBLEMAS de ESCAPE:**

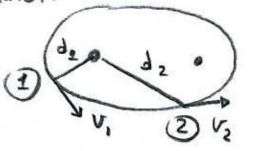
a) **GENERAL**: si m se halla a distancia d de M y se mueve con velocidad v, tiene $E(1) = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{d}$. La energía mínima ΔE que hay que suministrarle para ESCAPAR es tal que $E(1) + \Delta E = E(2) = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta E = -E(1)}$.

b) **VELOCIDAD de ESCAPE**: En la superficie de un planeta "p", se define la "velocidad de escape", v_e, como la velocidad más pequeña que puede tener un cuerpo para escapar: $\boxed{v_e = \sqrt{2\frac{GM_p}{R_p}}}$

3.2.2.- CONSERVACIÓN / NO CONSERVACIÓN de la ENERGÍA (total).

a) **CONSERVACIÓN**: cuando sólo actúa F_g (ni motor, ni rozamiento...)

ÓRB. CERRADA:



$E(1) = E(2)$

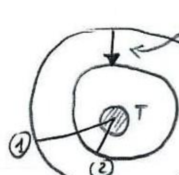
d_1	d_2
v_1	v_2

$d = R_T + h_{máx}$

("ALTURA MÁXIMA de PROYECTILES").

b) **NO CONSERVACIÓN**: cuando no sólo actúa F_g (actúa motor, rozamiento etc.)

$E(1)$
↓
$E(2)$



cambio de órbita: encendemos motor.

[si $\Delta E < 0$, energía "perdida" o "quitada"]

⤷ ingecta [o quita] energía al sistema: $\boxed{W_{ext} = \Delta E = E(2) - E(1)}$: energía suministrada.

[punto sólo de ~~ampliación~~]

3.2.3.- ENERGÍA EN EL INFINITO: INTERPRETACIÓN del VALOR NUMÉRICO de E_{TOT}.

Supongamos un movimiento durante el cual sólo actúa F_g ⟹ E se conserva ⟹ $\boxed{E = E(1) = E(2) = E(3) = \cdots = E(\infty)}$

punto ① de la trayectoria   punto 2   punto 3

energía que m tiene cuando la distancia se hace "muy grande", $d \to \infty$, o "ENERGÍA en el INFINITO".

$$\boxed{E = E(\infty)} = \lim_{d\to\infty}\left(\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{d}\right) = \boxed{\frac{1}{2}mv_\infty^2}$$

v_∞: velocidad que m tiene "en el infinito".

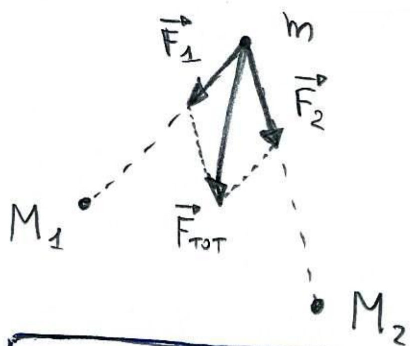
⟹ podemos interpretar E_{TOT} como la energía que m tiene cuando ya ha escapado de la acción gravitatoria de M (cuando "ha llegado al infinito"), por lo tanto la velocidad que tiene cuando ha escapado es: $\boxed{v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}}$

COMENTARIO: en el caso de E mínima para el escape, E = 0, llega al infinito con $v_\infty = 0$.
Si $E < 0$ nos saldría raíz de un negativo, lo cual es absurdo (esto ya indica que no puede llegar al infinito si $E<0$ ⟹ NO ESCAPA).

3.3 TEORÍA GENERAL del CAMPO GRAVITATORIO

3.3.1.- PRINCIPIO de SUPERPOSICIÓN:

«cuando sobre m actúa la fuerza gravitatoria de dos masas, M_1 y M_2, la fuerza total se calcula como la suma vectorial de la fuerza que M_1 ejercería si M_2 no estuviera y la que M_2 ejercería si M_1 no estuviera»

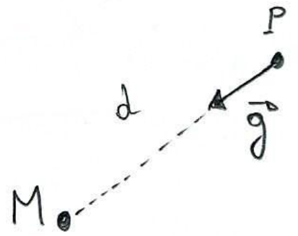


$$\boxed{\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2}$$

En general, para N masas,

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N$$

3.3.2.- CAMPO GRAVITATORIO CREADO POR UNA MASA M.



$$\boxed{\vec{g}_M(P) = \frac{\vec{F}(m)}{m}}$$

$\vec{F}(m)$: fuerza que actuaría sobre una masa m cualquiera puesta en el punto P.

m: valor de la masa m (masa "de prueba").

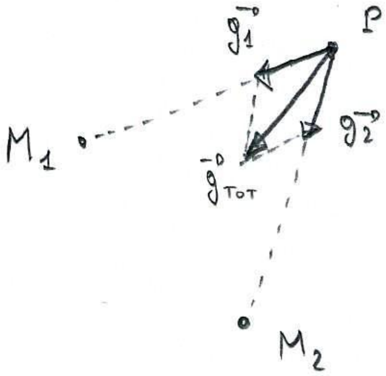
$\vec{g}_M(P)$: Campo grav. creado por M en el punto P (a distancia d)

forma práctica de trabajar (!)

$\Rightarrow$
- **MÓDULO** de $\vec{g}$: $\boxed{g_M(P) = G\frac{M}{d^2}}$ [SI: $m/s^2 = N/kg$]
- **DIRECCIÓN** y **SENTIDO** de $\vec{g}$: $\boxed{P \rightarrow M}$ ("atractivo" en la recta que une M y P).

COMENTARIO: si realmente colocamos una masa m en P, siente la fuerza $\boxed{\vec{F}(m) = m \cdot g_M(P)}$

3.3.3.- CAMPO $\vec{g}$ CREADO en P por VARIAS MASAS.



Definición: M_1 y M_2 crean en P:

$$\boxed{\vec{g}_{TOT} = \frac{\vec{F}_{TOT}(m)}{m}}$$

(siendo m una masa "prueba" cualquiera que ponemos en P).

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g}_{TOT}(P) = \vec{g}_1(P) + \vec{g}_2(P)}$$

forma práctica de trabajar (!)

« PRINCIPIO de SUPERPOSICIÓN para el campo gravitatorio. »

(Demo.: con PPO. SUP. para $\vec{F}_{TOT}$)

NOTA: para N masas, $\vec{g}_{TOT}(P) = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \dots + \vec{g}_N$

3.3.4.- DEFINICIÓN GENERAL de CAMPO GRAVITATORIO

« Decimos que en el punto P hay un campo gravitatorio $\vec{g}$ [S.I.: $m/s^2 = N/kg$] cuando una masa de prueba m cualquiera puesta en P siente una aceleración $\vec{a} = \vec{g}$ por acción de la gravedad. »

COMENTARIO: esta masa m sentiría una fuerza gravitatoria: $\boxed{\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}}$

(Demo.: con 2ª ley de Newton).

PEPE RÓDENAS BORJA

[dg ; 15-III-15]

FÍSICA (2º BACH.)

$\frac{R^3}{T^2} = \text{const.}$

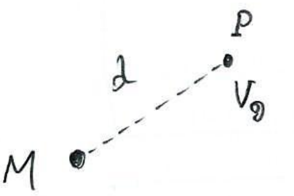
LWRY'15

TEMA 3 "CAMPO GRAVITATORIO"

(resumen)

3.3.5.- DEFINICIÓN de POTENCIAL GRAVITATORIO en P:

[punto prescindible muy a menudo]



Decimos que la masa M crea en el punto P (a distancia d) un potencial gravitatorio:

$$\boxed{V_g = -G\frac{M}{d}}$$

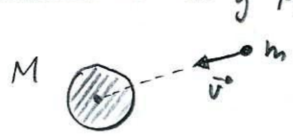
UNIDAD S.I.: $m^2/s^2 = N \cdot kg^{-1} \cdot m = J/kg$

COMENTARIOS: i) si ponemos una masa prueba m cualquiera en P, adquiere una energía potencial gravitatoria $\boxed{E_p = m \cdot V_g}$; ii) V_g cumple el PRINCIPIO de SUPERPOSICIÓN: si tenemos M_1 y M_2, $V_{TOT}(P) = V_1(P) + V_2(P)$.

3.4 DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA de TODAS las TRAYECTORIAS posibles del MOVIMIENTO bajo GRAVITACIÓN. LEYES de KEPLER.

3.4.1.- MOVIMIENTO en 1-D:

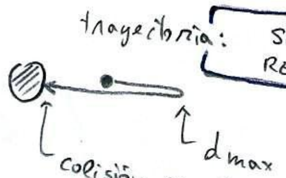
• Si $\vec{v}$ en un instante cualquiera (por ejemplo, en t_0 (inicial), pero no necesariamente) es paralela a la línea que une los centros de m y M



el movimiento tendrá lugar en una dimensión:

- $\boxed{E \geq 0}$: trayectoria: SEMIRRECTA (*) (escape)

- $\boxed{E < 0}$: trayectoria: SEGMENTO RECTILÍNEO



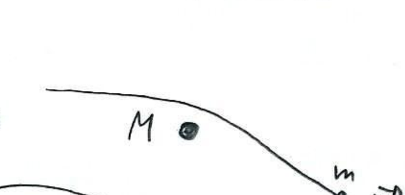
[*] evidentemente, si $\vec{v}$ mira hacia M, también colisionará.

3.4.2.- MOVIMIENTO en 2-D:

• Si $\vec{v}$ no es paralela a la línea que une los centros:

el movimiento es en 2D y la trayectoria es una cónica

- $\boxed{E > 0}$: rama de HIPÉRBOLA



- $\boxed{E = 0}$: PARÁBOLA

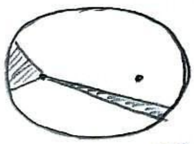
- $\boxed{E < 0}$: CIRCUNFERENCIA ó ELIPSE

3.4.3.- LAS TRES LEYES de KEPLER: es la descripción

geométrica de las órbitas de los planetas alrededor del Sol que Johannes Kepler propuso antes de que existieran las teorías de Newton sobre la Gravitación Universal:

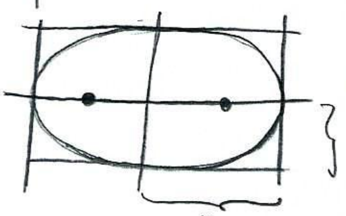
PRIMERA LEY: Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.

SEGUNDA LEY: El segmento rectilíneo que une el centro del Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.



TERCERA LEY: El cociente del cubo del semieje mayor de la órbita elíptica (R) con el cuadrado del periodo orbital (T) vale lo mismo para todos los planetas.

$$\frac{R^3}{T^2} = \text{constante}$$



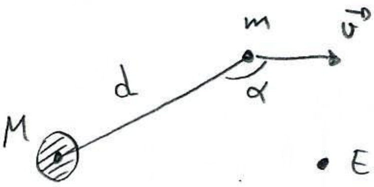
r: semieje menor.

R: semieje mayor.

el semieje mayor es igual a la distancia media, $\bar{d}$, entre M y m. A menudo aproximamos la elipse a una circunferencia, y entonces R juega el papel del radio de la circunferencia y la 3ª ley de Kepler se escribe como en el punto 3.1.2.: $\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$.

3.4.4.- EL MOMENTO ANGULAR y LA 2ª LEY de KEPLER.

- Imaginemos un instante cualquiera del movimiento de m bajo la gravedad de M en el caso más general posible. Llamaremos α al ángulo que forman la velocidad y el segmento que une los centros de m y M:



« Definimos el momento angular, L, de m en ese instante como: $\boxed{L = d \cdot m \cdot v \cdot \text{sen}\,\alpha}$ »

[S.I.: $m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$]

- Enunciado equivalente de la 2ª ley de KEPLER: $\boxed{L = \text{constante}}$ en todos los puntos de la órbita.

- MOMENTO ANGULAR en PERIHELIO (d MÍNIMA) y AFELIO (d MÁXIMA):

$\alpha = 90° \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 1$

$\Rightarrow \boxed{L = dmv}$

$\Rightarrow$ entre P y A, la 2ª ley de KEPLER se escribe: $\boxed{d_P v_P = d_A v_A}$.