MATES 2n BAT.

Novembre '13

Exercicis de Derivades (nivell intermedi)

▷ Usarem, com a referència, la següent taula de regles de derivació: (k, n, b són constants — núms. reals —; u, v són funcions)

1.- $y = k \rightarrow y' = 0$

2.- $y = x \rightarrow y' = 1$

3.- $y = u + v \rightarrow y' = u' + v'$

4.- $y = ku \rightarrow y' = ku'$

5.- $y = u^k \rightarrow y' = k u^{k-1} u'$

6.- $y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

7.- $y = u \cdot v \rightarrow y' = u'v + uv'$

8.- $y = \dfrac{u}{v} \rightarrow y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

9.- $(e^u)' = e^u \cdot u'$

10.- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

11.- $(\operatorname{sen} u)' = \cos u \cdot u'$

12.- $(\cos u)' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$

13.- $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \operatorname{tg}^2 u) \cdot u'$

14.- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

15.- $(\log_b x)' = \dfrac{1}{\ln b} \cdot \dfrac{1}{x}$

NOTA: si en les fòrmules 14 i 15 tenim una funció u en comptes d'una x, es deriva igual però multiplicant al final per u':

$$\boxed{(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'}$$

▷ COM FER ELS EXERCICIS: Amb les anteriors 15 regles pots calcular les derivades de les vint-i-sis funcions que presentem a continuació. Com a ajuda, entre claudàtors estan indicades les principals regles a aplicar. Hem ressaltat en negreta la més important en cada cas.

Al final de tot tens les solucions dels exercicis.

Hi ha dues possibles maneres de fer els exercicis:

- si estàs aprenent a derivar: aleshores, convé fer-los tots en ordre, de l'a a la z.
- si estàs repassant derivades: llavors, pots triar els que més t'interessin mirant quines regles estan en negreta, i fent els relacionats amb la regla que vols repassar.

Recordatori de logaritmes

"EQUACIÓ del CANVI de BASE":

$$\boxed{\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}}$$

"PROPIETATS dels LOGARITMES NEPERIANS":

$$\begin{cases} \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \\ \ln(x^a) = a \ln x \end{cases}$$

FUNCIONS a DERIVAR :

a) $f(x) = \text{sen}\, 7x$ [regles: 2, 4, **11**]

b) $f(x) = \ln(8x+2)$ [1 a 4, **10**]

c) $f(x) = e^{5x}$ [2, 4, **9**]

d) $f(x) = \text{tg}(\sqrt{2}\,x - 1)$ [1 a 4, **13**]

e) $f(x) = e^{x^2+2x-6}$ [1 a 5, **9**]

f) $f(x) = 5\cos(9x-1)$ [1 a 4, **12**]

g) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ [6, **9**]

h) $f(x) = \ln\sqrt{x-1}$ [6, **10**]

i) $f(x) = \text{sen}\, 2x \cdot \cos 5x$ [**7**, 11, 12]

j) $f(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}$ [6, **9**]

k) $f(x) = 8\, x^2\, \text{sen}\, x$ [4, **7**, 11]

l) $f(x) = \text{sen}(\ln x)$ [10, **11**]

m) $f(x) = 5\, e^{\cos x}$ [**9**, 12]

n) $f(x) = \text{tg}(\cos x + \text{sen}\, x)$ [3, 11, 12, **13**]

o) $f(x) = 6\ln(\sqrt{x} + \text{sen}\, 2x)$ [3, 6, **10**, 11]

p) $f(x) = \log_2 x$ [**15**]

q) $f(x) = \log_5 (x^2-3)$ [1 a 5, **15**]

r) $f(x) = 6\log_2(\sqrt{x+1})$ [6, **15**]

s) $f(x) = 5^x$ [**14**]

t) $f(x) = 2^{\text{sen}\, x}$ [11, **14**]

u) $f(x) = 2 \cdot (3^{5x-1})$ [1 a 4, **14**]

v) $f(x) = A\, e^{\text{tg}(Mx) + N\sqrt{x}}$ [4, 6, **9**, 13]

w) $f(x) = 6\, x^{3/2}$ [4, **5**]

x) $f(x) = \cos^2(x+1)$ [**5**, 12]

y) $f(x) = \ln^5(x + \text{sen}\, 2x)$ [3, **5**, 10, 11]

z) $f(x) = \dfrac{1}{x^6}$ [**5**]

SOLUCIONS :

NOTA : També pots revisar el resultat online amb la següent eina matemàtica:
http://www.wolframalpha.com/input/?i= derivative

a) $f'(x) = -7\cos 7x$

b) $f'(x) = \dfrac{8}{8x+2} = \dfrac{4}{4x+1}$

c) $f'(x) = 5\, e^{5x}$

d) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2(\sqrt{2}\,x - 1)}$

e) $f'(x) = e^{x^2+2x-6} \cdot (2x+2) = 2\, e^{x^2+2x-6}(x+1)$

f) $f'(x) = -5\, \text{sen}(9x-1) \cdot 9 = -45\, \text{sen}(9x-1)$

g) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2(x-1)}$

→ Camí alternatiu: podem transformar l' $f(x)$ una mica, abans de derivar, utilitzant les propietats dels logaritmes:

$$f(x) = \ln\sqrt{x-1} = \ln(x-1)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(x-1) \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln(x-1)\right)' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}$$

Així hem evitat haver de derivar l'arrel.

i) $f'(x) = \cos 2x \cdot 2 \cdot \cos 5x + \text{sen } 2x \cdot (-\text{sen } 5x) \cdot 5 =$

$= 2\cos 2x \cos 5x - 5 \text{ sen } 2x \text{ sen } 5x$ // → COMENTARI: Si aquí recordem les fórmules del producte de cosinus i producte de sinus:

$$\begin{cases} \cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right] \\ \text{sen } A \cdot \text{sen } B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] \end{cases}$$

podem aplicar-les al resultat de la derivada i simplificar-la una mica més:

$$f'(x) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}(\cos 7x + \cos 3x) - \frac{5}{2}(\cos 3x - \cos 7x) =$$

$$= \frac{7}{2}\cos 7x - \frac{3}{2}\cos 3x \quad \blacksquare$$

En la pràctica, pot resultar veritablement útil saber fer una simplificació com aquesta; de tota manera, a nivell de 2n de BAT., no és obligatori fer-la.

j) $f'(x) = e^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} e^{\sqrt{x^2-1}}$ //

k) $f'(x) = 8 \cdot (2x \cdot \text{sen } x + x^2 \cdot \cos x) = 8x(2 \text{ sen } x + x \cos x)$ //

l) $f'(x) = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}$ //

m) $f'(x) = 5\, e^{\cos x} \cdot (-\text{sen } x) = -5 \text{ sen } x\, e^{\cos x}$ //

n) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(\cos x + \text{sen } x)} \cdot (-\text{sen } x + \cos x) = \frac{\cos x - \text{sen } x}{\cos^2(\cos x + \text{sen } x)}$ //

o) $f'(x) = 6 \frac{1}{\sqrt{x} + \text{sen } 2x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\cos 2x\right)$ //

p) $f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x}$ //

q) $f'(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{1}{x^2-3} \cdot 2x = \frac{2x}{\ln 5 \cdot (x^2-3)}$ //

r) $f'(x) = 6 \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3}{\ln 2 \cdot (x+1)}$ // → COMENTARI: Una altra manera de fer el càlcul, també vàlida, és recordar les propietats dels logaritmes i manipular de la manera següent la funció abans de derivar-la:

$$f(x) = 6 \log_2 \sqrt{x+1} = 6 \frac{1}{\ln 2} \ln \sqrt{x+1} = \frac{6}{\ln 2} \ln (x+1)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{6}{\ln 2} \frac{1}{2} \ln(x+1) = \frac{3}{\ln 2} \ln(x+1) \Longrightarrow f'(x) = \left(\frac{3}{\ln 2} \ln(x+1)\right)' = \frac{3}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x+1} \quad \blacksquare$$

s) $f'(x) = 5^x \ln 5$ //

t) $f'(x) = 2^{\text{sen } x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x$ //

u) $f'(x) = 2 \cdot 3^{5x-1} \ln 3 \cdot 5 = 10 \ln 3 \cdot 3^{5x-1}$ //

v) $f'(x) = A\, e^{tg(Mx) + N\sqrt{x}} \left(\frac{M}{\cos^2(Mx)} + \frac{N}{2\sqrt{x}} \right)$ //

w) $f'(x) = 6 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = 9x^{1/2} = 9\sqrt{x}$ //

x) $f'(x) = 2\cos(x+1) \cdot \left[-\operatorname{sen}(x+1) \right] = -2\cos(x+1)\operatorname{sen}(x+1)$ //

COMENTARI: A nivell de 2n de BAT. no es obligatori fer-ho, però podem simplificar més el resultat si recordem la fórmula del "sinus de l'angle doble":

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A,$$

la qual cosa aplicada al nostre cas duu a que:

$$f'(x) = -\cos(2x+2)$$

y) $f'(x) = 5 \ln^4(x + \operatorname{sen} 2x) \cdot \frac{1}{x + \operatorname{sen} 2x} \cdot (1 - 2\cos x)$ //

z) $f'(x) = (x^{-6})' = -6x^{-6-1} = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$ //