(MATES 2n BAT.)

Novembre'13

EXERCICIS D'AMPLIACIÓ de DERIVADES ELEMENTALS

23NOV'13

1/2

▷ Usarem, com a referència, la següent taula de regles de derivació bàsiques: (k és una constant -un nº real-; u i v són funcions)

1.- $y = k \rightarrow y' = 0$

2.- $y = x \rightarrow y' = 1$

3.- $y = u + v \rightarrow y' = u' + v'$

4.- $y = ku \rightarrow y' = ku'$

5.- $y = u^k \rightarrow y' = k u^{k-1} u'$

6.- $y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

7.- $y = u \cdot v \rightarrow y' = u'v + uv'$

8.- $y = \dfrac{u}{v} \rightarrow y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

9.- $(e^x)' = e^x$

10.- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

11.- $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

12.- $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

13.- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

NOTA: si en les darreres 9, 10, 11, 12 i 13 tenim una funció u en comptes d'una x, es deriva igual però multiplicant al final per u': $\boxed{(e^u)' = e^u \cdot u'}$

▷ Exercicis: amb les anteriors 13 regles bàsiques pots calcular les derivades de les següents funcions. Com a ajuda, tens entre parèntesi les principals regles a aplicar en cada cas. Al final tens les solucions de cada exercici. També pots revisar el resultat online amb la següent eina matemàtica: http://www.wolframalpha.com/input/?i=derivative.

Finalment, aquí tens un petit recordatori de potències i arrels:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} \; ; \quad x^n \cdot x^m = x^{n+m} \; ; \quad (x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \; ; \quad x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n}$$

· FUNCIONS A DERIVAR:

a) $f(x) = x - 1$ [regles: 1 a 5]

b) $f(x) = x^3 + 6$ [1 a 5]

c) $f(x) = 6x^3 + 2x^2 - x + 9$ [1 a 5]

d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ [1 a 5, 8]

e) $f(x) = \dfrac{5x^2 + 2x}{3x^4 - x^3}$ [1 a 5, 8]

f) $f(x) = (6x + 5)^3$ [5]

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ [5]

h) $f(x) = 6 \cdot \cos x$ [4, 12]

i) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ [5, 11]

j) $f(x) = \operatorname{tg}^9 x$ [5, 13]

k) $f(x) = 10 \operatorname{sen}^2 x$ [4, 5, 11]

l) $f(x) = \dfrac{14}{\cos^2 x}$ [4, 5, 12]

m) $f(x) = 2\sqrt{x}$ [4, 6]

n) $f(x) = \sqrt{4x+5}$ [1 a 4, 6]

o) $f(x) = 5\sqrt{\cos x}$ [4, 6, 12]

p) $f(x) = \frac{7}{\sqrt{x}}$ [4, 5]

q) $f(x) = 5 \cdot \ln x$ [4, 10]

r) $f(x) = \ln^7 x$ [5, 10]

s) $f(x) = \sqrt{\ln x}$ [6, 10]

t) $f(x) = 2e^x$ [4, 9]

u) $f(x) = \sqrt{e^x}$ [5, 9]

v) $f(x) = e^x + \ln x$ [3, 9, 10]

w) $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ [8, 10]

x) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \ln x$ [7, 10, 11]

y) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{x}$ [6, 7, 13]

z) $f(x) = ax^2 + bx + c$, sent-hi a, b i c constants (nombres reals). [1 a 5]

SOLUCIONS:

a) $f'(x) = 1$ b) $f'(x) = 3x^2$ c) $f'(x) = 6\cdot 3x^2 + 2\cdot 2x - 1 = 18x^2 + 4x - 1$

d) $f'(x) = \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

e) $$f'(x) = \frac{(10x+2)\cdot(3x^4 - x^3) - (12x^3 - 3x^2)\cdot(5x^2+2x)}{(3x^4 - x^3)^2} =$$

$$= \frac{30x^5 - 10x^4 + 6x^4 - 2x^3 - (60x^5 + 24x^4 - 15x^4 - 6x^3)}{(3x^4 - x^3)^2} =$$

$$= \frac{30x^5 - 4x^4 \boxed{-2x^3} - 60x^5 - 24x^4 + 15x^4 \boxed{+6x^3}}{(3x^4 - x^3)^2} = \frac{-30x^5 - 13x^4 + 4x^3}{(3x^4 - x^3)^2} = (*)$$

traiem factor comú x^3 a dalt, i també x^3 a dins del parèntesi de baix, que surt com a x^6 (pel quadrat)

$$(*) = \frac{-30x^2 - 13x + 4}{(3x-1)^2\, x^6}\, x^3 = \frac{-30x^2 - 13x + 4}{(3x-1)^2\, x^3}$$

f) $f'(x) = 3\cdot(6x+5)^2\cdot 6 = 18(6x+5)^2$ g) $f'(x) = (x^{-5})' = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$

h) $f'(x) = 6\cdot(-\operatorname{sen} x) = -6\operatorname{sen} x$ i) $f'(x) = 3\cdot\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$

j) $f'(x) = 9\cdot\operatorname{tg}^8(x)\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x) = 9\cdot\operatorname{tg}^8 x + 9\cdot\operatorname{tg}^{10} x$; equivalentment:

$f'(x) = 9\cdot\operatorname{tg}^8(x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = 9\cdot\operatorname{tg}^8 x\cdot\sec^2 x$

k) $f'(x) = 10\cdot 2\cdot\operatorname{sen} x\cdot\cos x = 20\operatorname{sen} x\cos x$ l) $f'(x) = 14\cdot(\cos^{-2} x)' =$

$= 14\cdot(-2)\cdot\cos^{-3} x\cdot(-\operatorname{sen} x) = 28\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$; equivalentment: $f'(x) = 28\operatorname{tg} x\sec^2 x$

[donc $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$; $\frac{1}{\cos x} = \sec x$]

(MATES 2n BAT.)

Novembre '13

EXERCICIS D'AMPLIACIÓ de DERIVADES ELEMENTALS

[illegible] '13

2/2

m) $f'(x) = \cancel{2}\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ //

n) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4x+5}}\cdot 4 = \dfrac{2}{\sqrt{4x+5}}$ //

o) $f'(x) = 5\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot(-\operatorname{sen} x) = -\dfrac{5\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$ //

p) $f'(x) = 7\left(\left(\sqrt{x}\right)^{-1}\right)' =$

$= 7\cdot(-1)\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{-2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -7\dfrac{1}{(\cancel{\sqrt{x}})^{\cancel{2}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{x\sqrt{x}} = -\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{x\cdot x^{1/2}} = -\dfrac{7}{2x^{3/2}}$ //

q) $f'(x) = \dfrac{5}{x}$ //

r) $f'(x) = 7\cdot\ln^6 x\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{7\ln^6 x}{x}$ //

s) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ //

t) $f'(x) = 2e^x$ //

u) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{e^x}}\cdot e^x = \dfrac{\sqrt{e^x}}{2}$ //

v) $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$ //

w) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot(1+x^2) - 2x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1+x^2-2x^2\ln x}{x\,(1+x^2)^2}$ //

[multipliquem a dalt i a baix per x, per treure el $\frac{1}{x}$ del numerador]

x) $f'(x) = \cos x\cdot\ln x + \operatorname{sen} x\cdot\dfrac{1}{x}$ //

y) $f'(x) = (1+\operatorname{tg}^2 x)\cdot\sqrt{x} + \operatorname{tg} x\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

equivalentment: $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\sqrt{x} + \operatorname{tg} x\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x\sec^2 x + \operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}}$ //

$\hookrightarrow = \sec^2 x\cdot\sqrt{x} = \dfrac{2x\sec^2 x}{2\sqrt{x}}$

z) $f'(x) = a\cdot 2x + b + 0 = 2ax + b$ //