EXERCICIS de DERIVADES (nivell avançat)

Usarem, com a referència, la següent taula de regles de derivació: (k, a, b són constants – nums. reals –; u i v són funcions)

1.- $y=k \rightarrow y'=0$

2.- $y=x \rightarrow y'=1$

3.- $y=u+v \rightarrow y'=u'+v'$

4.- $y=ku \rightarrow y'=ku'$

5.- $y=u^k \rightarrow y'=k u^{k-1} u'$

6.- $y=\sqrt{u} \rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

7.- $y=u\cdot v \rightarrow y'=u'v+uv'$

8.- $y=\frac{u}{v} \rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

9.- $(e^u)'=e^u\cdot u'$

10.- $(a^u)'=a^u\cdot \ln a\cdot u'$

11.- NOVA!! $(u^v)'=u^v\cdot \ln u\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u'$

12.- $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

13.- $(\log_b u)'=\frac{1}{\ln b}\frac{u'}{u}$

14.- $(\operatorname{sen} u)'=\cos u\cdot u'$

15.- $(\cos u)'=-\operatorname{sen} u\cdot u'$

16.- $(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}=(1+\operatorname{tg}^2 u)\,u'$

17.- NOVA!! $(\operatorname{arc\,sen} u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

18.- NOVA!! $(\operatorname{arc\,cos} u)'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

19.- NOVA!! $(\operatorname{arc\,tg} u)'=\frac{u'}{1+u'}$

COMPTE: la numeració d'aquesta taula de derivades no es correspon amb les utilitzades en les col·leccions d'exercicis de nivells intermedi i elemental.

Amb les anteriors 19 regles pots calcular les derivades de les vint-i-sis funcions presentades a continuació. Com a ajuda, entre claudàtors estàn indicades les principals regles a aplicar. Hem ressaltat en negreta les més importants en cada cas. Al final tens les solucions de tots els exercicis.

COM FER ELS EXERCICIS:

Hi ha dues possibles maneres:

- si estàs aprenent a derivar: aleshores, convé fer-los tots en ordre, de l'a a la 3
- si estàs repassant derivades: llavors, pots triar els que t'interessin mirant les regles que estan en negreta, i fent els relacionats amb la regla que vols estudiar.

Recordatori de trigonometria

"FUNCIONS CIRCULARS INVERSES":

$x=\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \alpha=\operatorname{arc\,sen} x$

$x=\cos\alpha \Rightarrow \alpha=\operatorname{arc\,cos} x$

$x=\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \alpha=\operatorname{arc\,tg} x$

$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\operatorname{sen} A}$

$\sec A=\frac{1}{\cos A}$

$\operatorname{cotg} A=\frac{1}{\operatorname{tg} A}$

FUNCIONS a DERIVAR :

a) $f(x) = \dfrac{e^{2x} + \ln^2 x + \cos 3x}{2}$ [Regles: 3, 4, 5, 9, 12, 15]

b) $f(x) = \dfrac{5}{(2x+6)^3}$ [1 a 4, 5]

c) $f(x) = \ln \sqrt{\ln x}$ [6, 12]

d) $f(x) = \dfrac{(x+2)\cdot \ln x}{\sqrt{x+1}}$ [6, 7, 8, 12]

e) $f(x) = \log_2 \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-4}}$ [6, 8, 13]

f) $f(x) = \cos \sqrt{x^2+16}$ [6, 15]

g) $f(x) = tg^3 \sqrt{x^2+2}$ [5, 6, 16]

h) $f(x) = \left[1 + \cos^2(1-3x)\right]^2$ [3, 5, 15]

i) $f(x) = sen^4 \left[\ln (x^2+3)\right]$ [5, 12, 14]

j) $f(x) = 4 \sec 3x$ [5, 15]

k) $f(x) = \sec^2 (x^3-2)$ [5, 15]

l) $f(x) = \dfrac{1}{sen^3 x}$ [5, 14]

m) $f(x) = e^{tg\,3x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}$ [5, 7, 9, 16]

n) $f(x) = 4\, arctg\, 2x$ [2, 4, 19]

o) $f(x) = arctg\, \dfrac{3x+2}{4}$ [1 a 4, 19]

p) $f(x) = arcsen\, \dfrac{\sqrt{3x}}{2}$ [6, 17]

q) $f(x) = 2^{arctg\, x} \cdot \sqrt{1-x^2}$ [6, 7, 10, 19]

r) $f(x) = x^x$ [2, 11]

s) $f(x) = x^{\cos x}$ [11, 15]

t) $f(x) = (7x)^{sen\, x}$ [2, 4, 11, 14]

u) $f(x) = (x^2+3)^{x+5}$ [1 a 5, 11]

v) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ [5]

w) $f(x) = \log_{\cos x} (sen\, x)$ [8, 12, 14, 15]

x) $f(x) = M \log_b (ax^2+c)$ [1 a 5, 13]

y) $f(x) = t e^x$ [2, 4, 9]

z) $f(t) = t e^x$ [2, 4]

SOLUCIONS :

NOTA : També pots revisar el resultat online amb la següent eina matemàtica :
http://www.wolframalpha.com/input/?i=derivative

a) $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} - 3\, sen\, 3x}{2} = e^{2x} + \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{3}{2} sen\, 3x$ //

b) $f'(x) = 5\left((2x+6)^{-3}\right)' = -3 \cdot 5 (2x+6)^{-4} \cdot 2 = -\dfrac{30}{(2x+6)^4} =$

$= -\dfrac{30}{2^4 \cdot (x+3)^4} = -\dfrac{15}{8(x+3)^4}$ //

c) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2x \ln x}$ //

→ camí alternatiu : recordant que $\ln x^a = a \ln x$,

$f'(x) = \left(\frac{1}{2} \ln (\ln x)\right)' = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\ln x} \dfrac{1}{x}$ ■

d) $$f'(x) = \frac{[(x+2)\cdot \ln x]' \cdot \sqrt{x+1} - \frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}}\cdot (x+2)\cdot \ln x}{(\cancel{\sqrt{x+1}})^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{\left[1\cdot \ln x + (x+2)\frac{1}{x}\right]\cdot \sqrt{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot (x+2)\cdot \ln x}{x+1} =$$

multipliquem tota l'expressió per $\cdot \frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}\cdot\frac{x}{x}$

$$= \frac{2\left[\ln x + (x+2)\frac{1}{x}\right]\cdot x(x+1) - \frac{\cancel{2\sqrt{x+1}}\,x}{\cancel{2\sqrt{x+1}}}\cdot (x+2)\cdot \ln x}{2x\sqrt{x+1}\,(x+1)} =$$

$$= \frac{2x(x+1)\ln x + 2(x+2)(x+1) - x(x+2)\ln x}{2x\sqrt{x+1}\,(x+1)} =$$

$$= \frac{2x^2\ln x + \cancel{2x\ln x} + 2(x^2 + \overbrace{x + 2x}^{3x} + 2) - x^2\ln x - \cancel{2x\ln x}}{2x\sqrt{x+1}\,(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2\ln x + 2x^2 + 6x + 4}{2x\,(x+1)^{3/2}}$$ //

e) $$f'(x) = \frac{1}{\ln 2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2-4}}}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-4}}}\,\frac{2x(x^2-4) - x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2\,\frac{x^2}{\cancel{x^2-4}}}\cdot\frac{\cancel{2x^3} - 8x - \cancel{2x^3}}{(x^2-4)^{\cancel{2}}} = -\frac{\overset{4}{\cancel{8x}}}{\cancel{2}\ln 2\cdot x^{\cancel{2}}\cdot(x^2-4)} =$$

$$= -\frac{4}{x(x^2-4)\ln 2}$$ //

f) $$f'(x) = -\operatorname{sen}\sqrt{x^2+16}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+16}}\cdot\cancel{2}x = -\frac{x\operatorname{sen}\sqrt{x^2+16}}{\sqrt{x^2+16}}$$ //

g) $$f'(x) = 3\,tg^2\sqrt{x^2-2}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2+2}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}\cancel{2}\cdot x = \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}\,\frac{\operatorname{sen}^2\sqrt{x^2+2}}{\cos^4\sqrt{x^2+2}}$$ //

(també vàlid: $f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}\,tg^2\sqrt{x^2+2}\,\sec^2\sqrt{x^2+2}$)

h) $f'(x) = 2\left[1+\cos^2(1-3x)\right]\cdot 2\cos(1-3x)\cdot(-\operatorname{sen}(1-3x))\cdot(-3) =$

$= 12\cos(1-3x)\cdot\operatorname{sen}(1-3x)\cdot\left[1+\cos^2(1-3x)\right]$ //

↳ S'hi poden fer algunes simplificacions addicionals (no cal, però, obligatòriament fer-les a nivell de 2n de BAT.):

$$\begin{cases} 2\cos A\operatorname{sen}A = \operatorname{sen}2A \\ 2\cos^2 A = \cos 2A + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x) = 6\cdot\operatorname{sen}(2-6x)\cdot\left[1+\frac{1}{2}\cos(2-6x)+\frac{1}{2}\right] =$

$= 3\operatorname{sen}(2-6x)\cdot\left[3+\cos(2-6x)\right]$ ■

i) $f'(x) = 4\cdot\operatorname{sen}^3\left[\ln(x^2+5)\right]\cdot\cos\left[\ln(x^2+5)\right]\cdot\frac{1}{x^2+5}\cdot 2x =$

$= \frac{8x}{x^2+5}\cdot\operatorname{sen}^3\left[\ln(x^2+5)\right]\cdot\cos\left[\ln(x^2+5)\right]$ //

j) $f'(x) = 4\cdot\left(\frac{1}{\cos 3x}\right)' = 4\cdot(-1)\cdot\cos^{-2}3x\cdot(-\operatorname{sen}3x)\cdot 3 =$

$= 12\cdot\frac{\operatorname{sen}3x}{\cos^2 3x}$ // (↳ també: $f'(x) = 12\operatorname{sen}3x\cdot\sec^2 3x$; igualment vàlid: $f'(x) = 12\operatorname{tg}3x\cdot\sec 3x$) ■

k) $f'(x) = \left(\left[\cos(x^3-2)\right]^{-2}\right)' = -2\cdot\cos^{-3}(x^3-2)\cdot(-\operatorname{sen}(x^3-2))\cdot 3x^2 =$

$= 6x^2\,\frac{\operatorname{sen}(x^3-2)}{\cos^3(x^3-2)}$ // (↳ també vàlids:

$f'(x) = 6x^2\,\frac{\operatorname{tg}(x^3-2)}{\cos^2(x^3-2)} = 6x^2\operatorname{tg}(x^3-2)\cdot\sec^2(x^3-2)$) ■

l) $f'(x) = (\operatorname{sen}^{-3}x)' = -3\operatorname{sen}^{-4}x\cdot\cos x = -3\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}$ //

També vàlid: $f'(x) = -3\,\frac{\operatorname{cotg}x}{\operatorname{sen}^3 x}$; també: $f'(x) = -3\operatorname{cotg}x\cdot\operatorname{cosec}^3 x$ ■

MATES 2n BAT.

Novembre '13

EXERCICIS de DERIVADES (nivell avançat)

m) $f'(x) = \left[e^{tg\,3x}\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3\right]\cdot\sqrt[3]{x^2+1} + e^{tg\,3x}\cdot\left[(x^2+1)^{1/3}\right]' =$

$= e^{tg\,3x}\left\{\frac{3\sqrt[3]{x^2+1}}{\cos^2 3x} + \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}\cdot 2x\right\} =$

$= e^{tg\,3x}\left\{\frac{3\sqrt[3]{x^2+1}}{\cos^2 3x} + \frac{1}{3}(x^2+1)^{-2/3}\cdot 2x\right\} =$

$= e^{tg\,3x}\left\{\frac{3\sqrt[3]{x^2+1}}{\cos^2 3x} + \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\right\} =$

$= e^{tg\,3x}\,\frac{9(x^2+1)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1} + 2x\cos^2 3x}{3\cos^2 3x\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} = e^{tg\,3x}\,\frac{9+9x^2+2x\cos^2 3x}{3\cos^2 3x\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$ //

n) $f'(x) = 4\,\frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{8}{1+4x^2}$ //

o) $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{3x+2}{4}\right)^2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4+\cancel{4}\frac{(3x+2)^2}{4\cancel{^2}}} = \frac{4}{4}\cdot\frac{3}{4+\frac{9x^2+4+2\cdot 3x\cdot 2}{4}} =$

$= \frac{12}{16+9x^2+4+12x} = \frac{12}{20+12x+9x^2}$ //

p) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3x}}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{3x}}\cdot 3 = \frac{3}{\underbrace{4}_{2\cdot 2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3x\cdot\left(1-\frac{3x}{4}\right)}} =$

$= \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2^2\cdot 3x\left(1-\frac{3x}{4}\right)}} = \frac{3}{2\sqrt{12x-9x^2}}$ //

q) $f'(x) = 2^{arctg\,x}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} + 2^{arctg\,x}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\cdot(-\cancel{2}x) =$

$= 2^{arctg\,x}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\ln 2 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ //

r) $f'(x) = x^x \cdot \ln x \cdot 1 + \underbrace{x \cdot x^{x-1}}_{x^x} \cdot 1 = x^x \cdot (\ln x + 1)$ //

s) $f'(x) = x^{\cos x} \cdot \ln x \cdot (-\operatorname{sen} x) + \cos x \cdot \underbrace{x^{\cos x - 1}}_{= \frac{x^{\cos x}}{x}} \cdot 1 =$

$= x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \operatorname{sen} x \ln x \right)$ //

t) $f'(x) = (7x)^{\operatorname{sen} x} \cdot \ln 7x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \underbrace{(7x)^{\operatorname{sen} x - 1}}_{= \frac{(7x)^{\operatorname{sen} x}}{(7x)}} \cdot 7 =$

$= (7x)^{\operatorname{sen} x} \left(\ln 7x \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cancel{7}x} \cdot \cancel{7} \right) = (7)^{\operatorname{sen} x} \cdot \left(\ln 7x \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)$ //

u) $f'(x) = (x^2+3)^{x+5} \cdot \ln(x^2+3) \cdot 1 + (x+5) \cdot (x^2+3)^{x+5-1} \cdot 2x =$

$= (x^2+3)^{x+5} \left[\ln(x^2+3) + \frac{2x(x+5)}{x^2+3} \right] = (x^2+3)^{x+5} \left[\ln(x^2+3) + \frac{2x^2+10x}{x^2+3} \right]$ //

v) $f'(x) = (x^{-3/5})' = -\frac{3}{5} x^{-\frac{3}{5}-1} = -\frac{3}{5} x^{-\frac{3+5}{5}} = -\frac{3}{5} x^{-8/5} = -\frac{3}{5\sqrt[5]{x^8}}$ //

w) $f'(x) = \left(\frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \cos x} \right)' = \frac{\overbrace{\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}^{= \operatorname{cotg} x} \cdot \ln \cos x + \overbrace{\frac{1}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x}^{= \operatorname{tg} x} \cdot \ln \operatorname{sen} x}{\ln^2 \cos x} =$

(!) és necessari recordar, abans de fer cap derivada, que: $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$

$= \frac{\operatorname{cotg} x}{\ln \cos x} + \operatorname{tg} x \, \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln^2 \cos x}$ //

x) $f'(x) = \frac{M}{\ln b} \cdot \frac{1}{ax^2+c} \cdot 2ax = \frac{2aM}{\ln b} \cdot \frac{x}{ax^2+c}$ /

y) $f'(x) = t\,e^x$ /

z) $f'(t) = e^x$ //

(!) COMPTE amb aquesta derivada: ara la variable de la nostra funció no és la x, sinó la t. La x passa a ser una simple constant —com l'M o l'a de l'exercici "x"—, i per tant e^x també és només una constant, que està multiplicant a la variable t. Per tant, apliquem la ja ben coneguda regla de:

« derivada de "constant per variable" = la constant » ▨