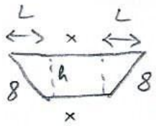
RESOLUCIONS de PROBLEMES d'OPTIMITZACIÓ :

10.Q a/ trapezi isòsceles  ; $L + x + L = 2x \Rightarrow$ (restricció) $\boxed{L = x/2}$ (*)

b/ $$\boxed{A = \frac{2x+x}{2}\cdot h \underset{\uparrow}{=} \frac{3x}{2}\sqrt{64 - \frac{x^2}{2^2}} = \frac{3x}{2}\sqrt{\frac{4\cdot 64}{2^2} - \frac{x^2}{2^2}} \underset{\uparrow}{=} \frac{3x}{4}\sqrt{256 - x^2}}$$

$\frac{1}{2^2}$ f. comú, i ix de l'arrel

(per a ficar h en funció d'x, hem d'utilitzar la restricció, però abans cal emprar el t^ma^ Pitàgores:
$$h^2 + L^2 = 8^2 \rightarrow h = \sqrt{8^2 - L^2} \underset{[*]}{=} \sqrt{64 - \frac{x^2}{2^2}}$$)

c/ $$A'(x) = \frac{3}{\cancel{4}}\left(\sqrt{256 - x^2} + x\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{256-x^2}}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 256 - x^2 = x^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{256}{2}}} = \sqrt{128} = \boxed{8\sqrt{2}} \simeq 11{,}3$$

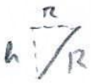
$\ominus$ no té sentit

Alternativa : si busquem extrems d'una certa funció $f(x)$, la funció $Q(x) = \left(f(x)\right)^2$ té els mateixos extrems, la qual cosa és molt útil per a funcions $f(x)$ amb arrels.

$$Q(x) = \frac{9}{16}x^2\left(256 - x^2\right) = \frac{9}{16}\left(256x^2 - x^4\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{9}{16}\left(2\cdot 256x - 4x^3\right) = \frac{9}{16}\cdot 4x\cdot\left(128 - x^2\right) = 0$$

$\Rightarrow x = 0$, no ens interessa ; i també: $x^2 = 128 \Rightarrow x = 8\sqrt{2}$

10.R a/ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, hem d'expressar h en termes d'r amb la restricció: estar inscrit a la semiesfera de radi R; per tant, pel t^ma^ de PITÀGORES,  $\Rightarrow r^2 = R^2 - h^2 \Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 - h^2\right)}$

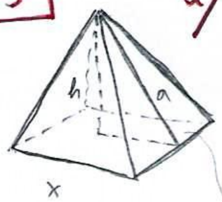
b/ $V(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2 h - h^3\right)$ aci, la variable independent respecte la qual derivem és h (!)

$\Rightarrow V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2 - 3h^2\right) = 0 \Rightarrow \boxed{h = \frac{R}{\sqrt{3}}}$ ($\ominus$ no té sentit) CANDIDAT (!!) a extrem.

r: $\boxed{r = \sqrt{R^2 - h^2}} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = R\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}\,R}$

COMPROVACIÓ: $V''(h) = -2\pi h \Rightarrow V''\left(h = \frac{R}{\sqrt{3}}\right) = -2\pi\frac{R}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow$ MÀXIM

$\boxed{10.S}$



a/ $$V = \frac{1}{3}\, x^2 \cdot \underbrace{h}_{[*]} = \frac{x}{6}\, 2x\sqrt{\frac{150^2}{x^2} - \frac{x^2}{4}} \quad (*,*)$$

Restricció:

$$300\ m^2 = 4 \cdot \overbrace{\left(\frac{x \cdot a}{2}\right)}^{\text{àrea una cara}} \Rightarrow a = \frac{150}{x}$$

Pitàgores: $$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{150^2}{x^2} - \frac{x^2}{4}} \quad (*)$$

$$[*,*] \Rightarrow \boxed{V(x) = \frac{x}{6}\sqrt{4x^2\left(\frac{150^2}{x^2} - \frac{x^2}{4}\right)} = \frac{x\sqrt{(9\times 10^4) - x^4}}{6}}$$

$4 \cdot 150^2 = 2^2 \cdot 150^2 = 300^2 = 9 \cdot 10^4$

b/ $$V'(x) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4} + x\,\frac{-4x^3}{2\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot 10^4 - x^4 = 2x^4 \Rightarrow \boxed{x = 10\sqrt[4]{3}} \simeq 13{,}16\ m$$

($-\sqrt[4]{\ }$ no ens interessa en el problema).

Alternativa: $$Q(x) = (V(x))^2 = \frac{x^2}{36}\left(9 \cdot 10^4 - x^4\right) = \frac{1}{36}\left(9 \cdot 10^4 x^2 - x^6\right)$$

$$\Rightarrow Q'(x) = \frac{1}{36}\left(2 \cdot 9 \cdot 10^4 x - 6x^5\right) = \frac{6x}{36}\left(3 \cdot 10^4 - x^4\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^4 = 3 \cdot 10^4 \Rightarrow \boxed{x = 10\sqrt[4]{3}}$$

($x = 0$ no ens interessa) $(-)$ no ens interessa.

$\boxed{10.T}$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c:$$

a/ $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow$ exigim: $f'(-1) = \boxed{3 - 2a + b = 0}$ (1)

(necessari per a extrem)

b/ $f''(x) = 6x + 2a \rightarrow f''(0) = 2a = 0 \rightarrow \boxed{a = 0}$ (2)

necessari per p. inf.

c/ $f(-2) = 0 \rightarrow \boxed{-8 + 4a - 2b + c = 0}$ (3)

d/ hem de resoldre el sistema format per les eqs. [1], [2] i [3], on a, b i c són les incògnites. Substituint [2] en [1] i en [3]:

$$\left.\begin{array}{l} [1] \rightarrow 3 + b = 0 \rightarrow \boxed{b = -3} \\ [3] \rightarrow -8 + 2 \cdot 3 + c = 0 \rightarrow \boxed{c = 2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = 0,\ b = -3,\ c = 2}$$

10.U $\quad f(x) = x^2 \cdot e^{-ax} \qquad (a \neq 0)$

a/ $f'(x) = 2x e^{-ax} - a x^2 e^{-ax} \Rightarrow f'(2) = 4 e^{-2a} - 4a e^{-2a} =$

$= \boxed{4 e^{-2a} (1-a) = 0} \Rightarrow \boxed{a = 1}$

condició necessària extrem

(nota: $e^{-2a} = 0$ no té solució:)

b/ $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x} \rightarrow f'(x) = 2x e^{-2x} (1-x) = 0$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\}$ CANDIDATS ; $\boxed{f''(x) = (2x e^{-2x})'(1-x) - 2x e^{-2x} =}$

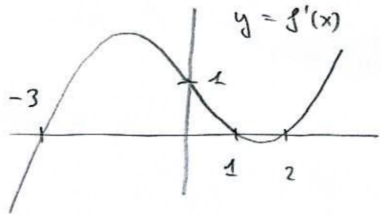
$= (2e^{-2x} - 4x e^{-2x})(1-x) - 2x e^{-2x} = \boxed{2e^{-2x}\left[(1-2x)(1-x) - x\right]}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0: \quad f''(0) = 2e^0 \left[(1)\cdot(1) - 0\right] = 2 > 0 \Rightarrow \boxed{\text{mínim en } x=0} \\ x = 1: \quad f''(1) = 2 \frac{1}{e^2} \left[(-1)\cdot\cancel{(1-1)} - 1\right] < 0 \Rightarrow \boxed{\text{màxim en } x=1} \end{array} \right.$

$\qquad\qquad 0$

10.V $\quad f(x)$ derivable; $f(0) = 0$;

$f'(x)$ és creixent en $(-\infty, 3]$ i $[2, +\infty)$.



a/ $m = f'(0) = 1$, segons la gràfica.

$t: \; y = mx + n \Rightarrow 0 = 0 + n \Rightarrow \boxed{n = 0} \Big\} \Rightarrow \boxed{t: \; y = x}$

$\quad y \to 0, \quad m \to 1, \quad x \to 0$

b/ hi ha extrems on $f'(x)$ canvia de signe, per tant:

$\boxed{x = -3}$: mínim (f' passa de $\ominus$ a $\oplus$)

$\boxed{x = 1}$: màxim (f' passa de $\oplus$ a $\ominus$)

$\boxed{x = 2}$: mínim (f' pass de $\ominus$ a $\oplus$).